

UNIVERSITÄT BONN

Physikalisches Institut

***Eine untere Massenschranke für Neutralinos  
aus Supernova-Kühlung***

von

Ulrich Langenfeld

**Abstract**

In my diploma thesis I calculate a lower mass bound of the lightest neutralino assuming an additional supernova cooling mechanism. I consider elektron-positron annihilation and nucleon-nucleon-bremsstrahlung as cooling processes. These cooling processes must not be too effective, because they would destroy the neutrino signal (SN 1987a). From this requirement I derive an upper bound for the emitted energy and as a consequence I get a lower bound for the mass of the lightest neutralino.

Dieser Forschungsbericht wurde als Diplomarbeit von der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn angenommen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Überblick</b>	<b>1</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>3</b>
1.1 Einführung in die Themenstellung . . . . .	3
1.2 Was sind Neutralinos? . . . . .	4
1.2.1 Anschauliche Beschreibung . . . . .	4
1.2.2 Mathematische Beschreibung . . . . .	5
<b>2 Sternentwicklung</b>	<b>9</b>
2.1 Bildung einer Gaswolke . . . . .	9
2.1.1 Gravitation gegen kinetische Energie . . . . .	9
2.1.2 Quasihydrodynamisches Gleichgewicht . . . . .	10
2.1.3 Die Gasgleichung . . . . .	11
2.2 Thermonukleare Prozesse . . . . .	12
2.2.1 Eine weitere Energiequelle: Kernfusion . . . . .	12
2.2.2 Entwicklung zum Roten Riesen . . . . .	12
2.2.3 Entartung der Elektronen . . . . .	14
2.2.4 Weitere Entwicklung . . . . .	15
2.2.5 Die Chandrasekhar-Grenze . . . . .	16
2.3 Endzustände der Sternentwicklung . . . . .	22
2.3.1 Weiße Zwerge . . . . .	22
2.3.2 Neutronensterne . . . . .	23
2.3.3 Schwarze Löcher . . . . .	24
2.4 Sternkollaps und Neutrinoabkühlung . . . . .	24
<b>3 Neutralinoabkühlung der Supernova</b>	<b>29</b>
3.1 Die Emissivität des Elektron-Positron-Kanals . . . . .	29
3.1.1 $e^+e^-$ -Annihilation und Selektронаustausch . . . . .	29
3.1.2 Definition der Emissivität . . . . .	31

3.1.3	Emissivität des Elektron-Positron-Prozesses . . . . .	32
3.1.4	Die abgestrahlte Gesamtenergie . . . . .	32
3.1.5	Temperatur und chemisches Potential . . . . .	33
3.1.6	Das Resultat . . . . .	34
3.1.7	Frühere Resultate . . . . .	34
3.1.8	Diskussion der Parameter . . . . .	35
3.2	Die Nukleon-Nukleon-Bremsstrahlung . . . . .	43
3.2.1	Die Mechanismen der Nukleon-Nukleon-Bremsstrahlung . . . . .	43
3.2.2	Der Neutralintensor . . . . .	44
3.2.3	Die Emissivität . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>53</b>
4.1	Diskussion des Elektron-Positron-Kanals . . . . .	53
4.2	Die Nukleon-Nukleon-Bremsstrahlung . . . . .	55
4.3	Vergleich mit der Neutrinoluminosität . . . . .	56
<b>A</b>	<b>Der totale Wirkungsquerschnitt <math>\sigma(e^+e^- \rightarrow \chi_1^0\chi_1^0)</math></b>	<b>58</b>
A.1	Beteiligte Diagramme . . . . .	58
A.2	Feynmanregeln . . . . .	58
A.3	Die Übergangsmatrixelemente . . . . .	59
A.4	Der differentielle Wirkungsquerschnitt . . . . .	61
A.4.1	Berechnung der Betragsquadrate . . . . .	61
A.4.2	Weitere Vollständigkeitsrelationen . . . . .	63
A.4.3	Die Kinematik . . . . .	63
A.4.4	Der differentielle Wirkungsquerschnitt . . . . .	64
A.4.5	Der totale Wirkungsquerschnitt . . . . .	65
<b>B</b>	<b>Fierz-Transformation</b>	<b>66</b>
B.1	Fierz-Transformation . . . . .	66
B.1.1	Allgemeine Transformationsformel . . . . .	66
B.1.2	Anwendung auf $q\bar{q} \rightarrow \chi^0\chi^0$ . . . . .	67
B.2	Nichtrelativistischer Grenzfall der Kopplungsstrukturen . . . . .	68
<b>C</b>	<b>Partialwellenzerlegung</b>	<b>70</b>
<b>D</b>	<b>Liste der verwendeten Symbole</b>	<b>71</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Sternaufbau . . . . .	17
3.1	Massenabhängigkeit der Leistung . . . . .	35
3.2	Energieschranke . . . . .	37
3.3	Abhängigkeit der Massenschranke von der Dauer der Energieabstrahlung .	38
3.4	Bereiche mit Neutralino zwischen 10 und 400 MeV . . . . .	39
3.5	Szenario 1 . . . . .	40
3.6	Szenario 2 . . . . .	41
3.7	Abhängigkeit von der Selekttronenmasse . . . . .	42
3.8	Emissivität der Bremsstrahlung . . . . .	51
A.1	Impulse im Schwerpunktsystem . . . . .	63

# Tabellenverzeichnis

3.1	Nukleon-Nukleon-Bremsstrahlungsprozesse . . . . .	43
3.2	Wirkung der Transformationen . . . . .	45
3.3	Isospin und Hyperladung . . . . .	46
3.4	Summe zweier Diagramme . . . . .	48
3.5	Untere Massenschranke . . . . .	52
A.1	Vertexfaktoren . . . . .	60
B.1	Wirkung der Fierz-Transformation . . . . .	67
D.1	Liste physikalischer Größen . . . . .	72
D.2	Liste der Konstanten . . . . .	73
D.3	Liste der Operatoren . . . . .	73
D.4	sonstige Symbole . . . . .	73
D.5	Umrechnung cgs-Einheiten–natürliche Einheiten . . . . .	74

# Überblick

In der vorliegenden Arbeit habe ich eine untere Massenschranke für das leichteste Neutralino berechnet. Bei einer Supernova-Explosion wird der größte Teil der freiwerdenden Energie in Form von Neutrinos abgestrahlt. Dieses Signal ist durch Simulationen bestätigt worden. Bei der Supernova SN 1987 A sind diese Neutrinos zum ersten Mal nachgewiesen worden. Ihr Signal dauerte ungefähr 10 s. Ein zusätzlicher Kühlmechanismus darf nicht zu effektiv sein. Er würde die Energie, die die Neutrinos wegtragen müssen, schon vorher abführen. Dann würde man ein kürzeres Neutrinosignal messen. Folglich läßt sich aus der Forderung, dieses Signal nicht zu zerstören, eine obere Schranke für die maximale Stärke eines zusätzlichen Kühlmechanismus ableiten, nämlich Kühlung durch die Emission von Neutralinos. Dies geschieht ohne eine Supernova zu simulieren.

Ausgangspunkt sind zwei Produktionsmechanismen für Neutralinos im Supernova-Core<sup>1</sup>, nämlich Vernichtung von Elektronen und Positronen sowie Nukleon-Nukleon-Bremsstrahlung. Das Core wird als durchsichtig für die Neutralinos angenommen. Diese Annahme ist für eine Selekttronenmasse im Bereich von mindestens 1 TeV erfüllt. Für den ersten Mechanismus ist ausgehend vom totalen Wirkungsquerschnitt die abgestrahlte Energie in Abhängigkeit der Masse des leichtesten Neutralinos berechnet worden. Für die Temperatur und die Entartung im Core der Supernova sind Profile aus einer gegebenen Simulation gewählt worden. Diese Simulation hat die Neutralinos nicht berücksichtigt. Die Masse des Selekttrons ist zwischen 100 GeV und 1000 GeV liegend angenommen worden. Die Abstrahldauer der Neutralinos ist im Bereich von 0.002 – 2 s variiert worden. Um die Massenschranke zu erhalten, wurde die abzustrahrende Energie nach oben begrenzt. Die Mischungsparameter des leichtesten Neutralinos haben bei kleinen Selekttronenmassen keinen Einfluß auf die abgestrahlte Energie. Das leichteste Neutralino besteht zu mindestens 98% aus Bino, der Rest verteilt sich hauptsächlich auf die beiden Higgsinos. Mit diesem Verfahren erhält man untere Schranken im Bereich von 50 MeV (Selekttronmasse groß, Abstrahldauer klein) bis 350 MeV (Selekttronmasse klein, Abstrahldauer groß).

Im zweiten Mechanismus ist die Emissivität direkt mit dem Raffelt-Kriterium - einer

---

<sup>1</sup>Ich verwende “Core” für das aktive Sternzentrum und “Kern” als Kurzform von Atomkern.

oberen Schranke für die Emissivität, die durch Simulationen überprüft worden ist - verglichen worden. Da die Strahlung als “*soft*” genähert wird, erhält man einen Ausdruck für die Emissivität in Abhängigkeit der Neutralinomasse und der Coretemperatur, der für alle Teilchen verwendbar ist, die an den axialen Strom koppeln. Hier ist die Squarkmasse wie oben beim Seletron eine unbekannte Größe, für die ein ähnlicher Massenbereich wie für die Seletronenmasse zugrunde gelegt wird. Damit erhalte ich Massenschranken in derselben Größenordnung.

Ein leichtes Neutralino im Bereich von 34 MeV kann somit nicht durch Supernova-Kühlung ausgeschlossen werden, sofern die Sfermionmassen hoch genug sind.



# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Einführung in die Themenstellung

Das Ziel meiner Arbeit ist die Berechnung einer unteren Massenschranke für das als leichtestes supersymmetrisches Teilchen angenommene Neutralino  $\chi_1^0$  mittels Supernova-Kühlung. Dabei darf die Supernova nicht zu viel Energie in Form von Neutralinos abstrahlen, damit das beobachtete zeitverzögerte Neutrinosignal nicht zerstört wird. Als 1987 der Stern Sanduleak 69202 in der Großen Magellanschen Wolke explodierte, konnten zum ersten Mal die bei einer Supernova entstehenden Neutrinos in den Wasser-Tscherenkow-Detektoren Irvine-Michigan-Brookhaven (IMB) und Kamiokande II beobachtet werden. Diese waren eigentlich zur Messung des Protonzerfalls gebaut worden. Neutrinos tragen wesentlich zur Kühlung einer Supernova-Explosion bei. Sie führen hundert bis tausend Mal so viel Energie wie Photonen ab. Ihr Signal dauerte etwa 10 sec. Jeder zusätzliche Kühlmechanismus darf nicht zu effektiv sein. Denn sonst würde dieser Kühlmechanismus das Core so weit kühlen, daß die Neutrinos nicht mehr gefangen wären und das Neutrinosignal kürzer wäre. Das steht jedoch im Widerspruch zu den Beobachtungen. Im folgenden nehmen wir an, daß es einen weiteren Kühlmechanismus gibt, der Energie aus dem Supernova-Core nach außen abführen kann, nämlich die Produktion von Neutralinos. Neutralinos können auf folgende Arten erzeugt werden:

- Elektron-Positron-Annihilation in ein  $Z^0$ -Boson:  $e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow \chi_1^0\chi_1^0$   
Elektron-Positron-Streuung:  $e^+e^- \rightarrow \chi_1^0\chi_1^0$  unter Austausch eines Selektrens
- Nukleon-Nukleon-Bremsstrahlung:  $NN \rightarrow NN\chi_1^0\chi_1^0$ .  
Bei diesem Prozeß wird entweder ein  $Z^0$  abgestrahlt, das in zwei Neutralinos zerfällt, oder ein Quark geht kurzzeitig in ein Squark über und strahlt dabei zwei Neutralinos ab.

Für diese Mechanismen berechnen wir die Emissivität (Energieabgabe pro Zeit und Volumen oder Energieabgabe pro Zeit und Masse) in Abhängigkeit von der Neutralinomasse. Im ersten Fall liefern Volumen- und Zeitintegration die absolute freigesetzte Energie in Abhängigkeit von der Neutralinomasse. Diese Berechnungen erfolgen numerisch. Man kann aus der Anfangs- und der Endgröße des Cores abschätzen, wieviel Energie von einer Supernova maximal abgestrahlt wird. Dies sind etwa  $3 \cdot 10^{53}$  erg. Den Großteil davon führen Neutrinos ab. Im Durchschnitt führt jede der sechs Neutrinoarten demzufolge  $5 \cdot 10^{52}$  erg ab. Die Annahme, daß  $10^{52}$  erg in Form von Neutralinos abgestrahlt werden, sollte nicht zu einer Zerstörung des Neutrinosignals führen. In die Berechnungen gehen eine Reihe von Parametern ein: Temperatur, chemisches Potential und Dichte des Sterncores, die Mischungsparameter des leichtesten Neutralinos, die Selekttronmasse und die Dauer der Energieabstrahlung. Für diese Parameter wurden geeignete Modelle oder Werte zugrunde gelegt.

Im Falle der Nukleon-Bremsstrahlung ist es nicht notwendig, die Emissivität  $\epsilon$  über das Volumen und die Zeit zu integrieren. Hier kann die Emissivität sofort mit einem Kriterium von Raffelt verglichen werden:  $\epsilon \leq 10^{19}$  erg/(g·s) (aus [Raf96]). Dieses Kriterium ist durch Simulationen bestätigt worden. Das Endergebnis ist für andere Theorien verwendbar.

## 1.2 Was sind Neutralinos?

### 1.2.1 Anschauliche Beschreibung

Zuerst soll kurz erläutert werden, was Neutralinos überhaupt sind. Supersymmetrie ist eine Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen. Damit kann das Hierarchieproblem in der Teilchenphysik gelöst werden (s. [Mar97],[Hab93]). In der Supersymmetrie (kurz SUSY) wird jedem Boson ein Fermion als Superpartner zugeordnet und umgekehrt. Dadurch wird die Anzahl der Teilchen verdoppelt. Die Eichbosonen der Elektroschwachen Kraft sind nach spontaner Symmetriebrechung durch ein komplexes Higgs- $SU(2)$ -Dubletts die geladenen  $W$ -Bosonen, das neutrale  $Z^0$ -Boson und das ebenfalls neutrale Photon (s. [HM84]). Von den vier Freiheitsgraden dieses Higgsdubletts werden drei durch den Higgsmechanismus “aufgegessen”. Ein Higgs-Teilchen bleibt übrig. Zu den vier Austauschteilchen gibt es im “Minimalen Supersymmetrischen Standardmodell” (MSSM) vier fermionische Gauginos als Superpartner: die geladenen Winos und die neutralen Teilchen Zino und Photino (s. [HK85]). In der Supersymmetrie muß man zwei komplexe Higgs- $SU(2)$ -Dubletts einführen, damit u. a. sowohl up- als auch down-Quarks Masse erhalten ([HK85],[GH86]). Es bleiben am Ende nur fünf reelle Felder übrig, da drei Felder “aufgegessen” werden, um den schweren Vektorbosonen Masse zu geben. Von diesen fünf Feldern sind zwei geladen und drei neutral. Die fermionischen Superpartner dieser Higgs-Felder heißen (nach der Brechung von  $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{em}}$ ) Higgsinos. Die zwei CP-geraden neutralen

Higgsinos mischen mit den neutralen Gauginos Photino und Zino sowie die geladenen Higgsinos mit den Winos. Die Eigenzustände der Schwachen Wechselwirkung sind also nicht die propagierenden Masseneigenzustände. Die neutralen Masseneigenzustände werden Neutralinos genannt, die geladenen Charginos. Um die Masseneigenzustände zu erhalten, muß man die Massenmatrix diagonalisieren.

Des weiteren gehe ich von erhaltener  $R$ -Parität aus (weswegen die Neutrinos nicht mit den Neutralinos mischen) und nehme an, daß bei hohen Energien keine GUT-Symmetrie auftritt, also die  $SU(3)_c \times SU(2) \times U(1)_Y$ -Theorie nicht zur  $SU(5)$ -Theorie vereinigt wird.

## 1.2.2 Mathematische Beschreibung

### Neutralinos

Für die Einführung in die SUSY-Theorie verweise ich auf die Literatur: Der Superfeld-Formalismus, mit dem man supersymmetrische Lagrangendichten konstruieren kann, wird z. B. in [BL94] dargestellt. Die Konstruktion supersymmetrischer Lagrangefunktionen für eine  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Theorie wird in [HK85] beschrieben, der Higgs-Sektor wird in [GH86] erläutert.

Ich fasse hier die Resultate über die Neutralino-Massenmatrix kurz zusammen:

- Massenterme: In der Lagrangedichte des MSSM findet man folgende Massenterme für die Superpartner der neutralen Eichbosonen und neutralen Higgsfelder unter Berücksichtigung des Symmetriebruchs von  $SU(2) \times U(1)_Y$  zu  $U(1)_{\text{em}}$  und der *soft susy-breaking* Terme (siehe dazu [HK85]) (in Weylspinor-Darstellung):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M = & \frac{1}{2}i\sqrt{(g^2 + g'^2)}\lambda_Z(v_1\psi_{H_1}^1 - v_2\psi_{H_2}^2) + \frac{1}{2}(M\cos^2\theta_W + M'\sin^2\theta_W)\lambda_Z\lambda_Z \\ & + (M - M')\sin\theta_W\cos\theta_W\lambda_Z\lambda_\gamma + \frac{1}{2}(M'\cos^2\theta_W + M\sin^2\theta_W)\lambda_\gamma\lambda_\gamma + \mu\psi_{H_1}^1\psi_{H_2}^2 \\ & + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Hier bedeuten  $g, g'$ : Kopplungskonstanten der  $SU(2) \times U(1)_Y$ -Theorie,  $v_1, v_2$  sind die Vakuumserwartungswerte der zwei neutralen  $CP$ -geraden Higgsfelder,  $\theta_W$  ist der elektroschwache Mischungswinkel,  $M, M', \mu$  sind Wino- und Binomasse sowie der Higgsmischungsparameter aus dem Superpotential und  $\lambda_\gamma, \lambda_Z, \psi_{H_1}^1, \psi_{H_2}^2$  bezeichnen Photino-, Zino- und die beiden Higgsinofelder.

- Basis: Anstatt der Photinobasis  $\{\lambda_\gamma, \lambda_Z, \psi_{H_1}^1, \psi_{H_2}^2\}$  wird häufig auch die Bino-Basis

$\{\lambda', \lambda^3, \psi_{H_1}^1, \psi_{H_2}^2\}$  verwendet. Dann sieht Gleichung (1.1) so aus:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M = & \frac{1}{2}ig\lambda^3(v_1\psi_{H_1}^1 - v_2\psi_{H_2}^2) - \frac{1}{2}ig'\lambda'(v_1\psi_{H_1}^1 - v_2\psi_{H_2}^2) \\ & + \frac{1}{2}M\lambda^3\lambda^3 + \frac{1}{2}M\lambda'\lambda' + \mu\psi_{H_1}^1\psi_{H_2}^2 + \text{h.c.} \quad . \end{aligned} \quad (1.2)$$

- Mischungsmatrix: Schreibt man die Elemente der Bino-Basis als  $\psi_j^0$ ,  $j = 1 \dots 4$ , so kann man die letzte Gleichung in die Form

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}(\psi_i^0)Y_{ij}\psi_j^0 \quad (1.3)$$

bringen (über doppelt auftretende Indizes ist zu summieren) mit der (im allgemeinen komplexwertigen) Mischungsmatrix  $Y$ :

$$Y = \begin{pmatrix} M' & 0 & -m_Z \cos \beta \sin \theta_W & m_Z \sin \beta \sin \theta_W \\ 0 & M & m_Z \cos \beta \cos \theta_W & -m_Z \sin \beta \cos \theta_W \\ -m_Z \cos \beta \sin \theta_W & m_Z \cos \beta \cos \theta_W & 0 & -\mu \\ m_Z \sin \beta \sin \theta_W & -m_Z \sin \beta \cos \theta_W & -\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

$\tan \beta = \frac{v_2}{v_1}$  ist das Verhältnis der Vakuumerwartungswerte  $v_1, v_2$  der Higgsfelder.

$M, M', \mu, \tan \beta$  sind unabhängige Parameter im MSSM.

- Diagonalisierung der Mischungsmatrix: Die Mischungsmatrix (1.4) ist nicht diagonal. Um die propagierenden Masseneigenzustände  $\chi_i^0$  zu erhalten, muß man die Mischungsmatrix diagonalisieren. Dabei können die Eigenwerte negativ werden. Deshalb nimmt man eine unitäre Diagonalisierungsmatrix  $N$ , wobei man die freien Phasen so wählt, daß die Eigenwerte der Diagonalmatrix  $N_D$  positiv sind (siehe [MP90]). Dann ist eine Interpretation der Eigenwerte als Massen möglich ist ([HK85]). Die Vorzeichen der Massen können als  $CP$ -Eigenwerte gedeutet werden ([BNP84]). Es gilt:

$$Y_D = N^* Y N^{-1}, \quad (1.5)$$

$$\chi_i^0 = N_{ij}\psi_j^0, \quad i, j = 1 \dots 4 \quad \text{Neutralino-Masseneigenzustände} \quad . \quad (1.6)$$

Der Massenterm 1.3 läßt sich dann als  $-\frac{1}{2} \sum_i M_i \bar{\chi}_i^0 \chi_i^0$  schreiben, wobei  $M_i$  die Eigenwerte der Matrix (1.4) sind. Man kann dies auch in vierkomponentige Majorana-Spinoren umschreiben:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} \sum_i M_i \bar{\tilde{\chi}}_i^0 \tilde{\chi}_i^0; \quad \tilde{\chi}_i^0 = \begin{pmatrix} \chi_i^0 \\ \bar{\chi}_i^0 \end{pmatrix} \quad . \quad (1.7)$$

Die Eigenwerte der Massenmatrix bestimmt man am besten numerisch. Es gibt aber auch analytische Lösungen, siehe dazu [KAS92].

### Charginos

Die Mischungsmatrix der Charginos hängt von  $M$ ,  $\mu$  und  $\beta$  ab. Weil die Gauginos elektromagnetisch wechselwirken können und sie deshalb im Prinzip einfacher zu entdecken sind als die elektrisch neutralen Neutralinos, müssen die Parameter der Mischungsmatrix so gewählt werden, daß die Charginos schwerer als 120 GeV sind, der momentanen unteren Massenschranke, die durch die Beschleuniger gesetzt ist. Hier eine Zusammenfassung der Resultate für die Charginos:

- Der Chargino-Massenterm (Weyl-Spinor-Schreibweise) ist gegeben durch:

$$\mathcal{L}_M = \frac{ig}{\sqrt{2}} (v_1 \lambda^+ \psi_{H_1}^2 + v_2 \lambda^- \psi_{H_2}^1) + M \lambda^+ \lambda^- - \mu \psi_{H_1}^2 \psi_{H_2}^1 + \text{h.c.} \quad (1.8)$$

- Gl. (1.8) läßt sich durch eine Basistransformation umformen:

$$\psi_j^+ = (-i\lambda^+, \psi_{H_2}^1), \quad \psi_j^- = (-i\lambda^-, \psi_{H_1}^1) \quad (1.9)$$

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} (\psi^+ \quad \psi^-) \begin{pmatrix} 0 & X^T \\ X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix} + \text{h. c.}, \quad (1.10)$$

wobei die Massenmatrix  $X$  gegeben ist durch:

$$X = \begin{pmatrix} M & m_w \sqrt{2} \sin \beta \\ m_w \sqrt{2} \cos \beta & \mu \end{pmatrix}; \quad (1.11)$$

$$m_w^2 = \frac{1}{4} g^2 (v_1^2 + v_2^2); \quad \tan \beta = \frac{v_2}{v_1} \quad (1.12)$$

- Die Masseneigenzustände erhält man durch Diagonalisieren der Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & X^T \\ X & 0 \end{pmatrix}$ :

$$\chi_i^+ = V_{ij} \psi_j^+, \quad \chi_i^- = U_{ij} \psi_j^-, \quad \mathcal{L}_M = -(\chi_i (X_D)_{ij} \chi_j^+ + \text{h. c.}) \quad (1.13)$$

mit  $U, V$  so, daß  $U^* X V^{-1} = X_D$  diagonal

- Aus den Weylspinoren lassen sich Diracspinoren  $\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2$  konstruieren:

$$\tilde{\chi}_1 = \begin{pmatrix} \chi_1^+ \\ \bar{\chi}_1^- \end{pmatrix}, \quad \tilde{\chi}_2 = \begin{pmatrix} \chi_2^+ \\ \bar{\chi}_2^- \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_M = -(M_+ \tilde{\chi}_1 \tilde{\chi}_1 + M_- \tilde{\chi}_2 \tilde{\chi}_2) \quad . \quad (1.14)$$

**Anmerkung:** Die oberen Indizes  $+$ ,  $-$  an den Spinoren kennzeichnen in diesem Abschnitt die Ladung und nicht die hermitesche Konjugation.

**Anmerkung zu Majorana-Massen:**

Massenterme für Diracspinoren haben die Form  $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_L\psi_R + \text{h. c.})$ , ( $\psi$ : Diracspinor,  $\psi_{L,R} = P_{L,R}\psi$ ,  $P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)$ ).  $\psi_L$  und  $\psi_R$  sind unabhängig voneinander und transformieren sich unter Lorentztransformationen verschieden. Solche Dirac-Massenterme mischen links- und rechtshändige Felder.

Majoranaspinoren  $\Psi$  haben die definierende Eigenschaft  $\Psi^c = C\bar{\Psi}^T = \Psi$ ,  $C$ : Ladungskonjugationsmatrix. Damit gilt  $\Psi_L^T = \bar{\Psi}_R$  und Massenterme haben die Form  $\frac{m}{2}(\psi_L^T\psi_L + \text{h. c.})$ . Es werden Komponenten gleicher Händigkeit gemischt. Dadurch ergibt sich ein anderes Transformationsverhalten für Majoranaspinoren, da allgemeine Massenterme die Gestalt  $\psi^T M \psi + \text{h. c.}$  haben, wobei  $\psi = (\psi_1 \dots \psi_n)$  Weyl-Spinoren sind. Transformiert man  $\chi_i = N_{ij}\psi_j$ , wobei  $N$  unitäre Matrix ist, dann gilt  $(N^{-1}\chi)^T M N^{-1}\chi = \chi^T N^* M N^{-1}\chi$ , was das auf den ersten Blick ungewöhnliche Transformationsverhalten der Neutrinomassenmatrix erklärt. Denn um eine hermitesche Matrix  $A$  mittels einer unitären Transformation  $U$  auf Diagonalgestalt  $A_D$  zu bringen, erwartet man das Transformationsgesetz  $A_D = U A U^\dagger$ .

# Kapitel 2

## Sternentwicklung

### 2.1 Bildung einer Gaswolke

In den folgenden Abschnitten werde ich die Entwicklung von Sternen aus einer Wasserstoffwolke kurz dargestellt, um das mögliche Supernova-Ereignis in der Entwicklung eines Sterns verstehen zu können. Dabei werden die thermodynamischen Zustandsgrößen zueinander in Beziehung gesetzt und erklärt, wie sie die Sternentwicklung steuern. Ich stütze mich auf [GS82].

#### 2.1.1 Gravitation gegen kinetische Energie

Um den Kollaps einer Wasserstoffwolke geringer Dichte zu verstehen, betrachte man die Energieverhältnisse in einer solchen Wolke:

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}M\overline{v^2} - \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = \frac{2}{3}\pi\overline{\rho v^2}R^3 - \frac{16}{15}G\pi^2\rho^2R^5 \quad (2.1)$$

( $M$ ,  $R$ ,  $\rho$ : Masse, Radius und Dichte der Gaswolke,  $\overline{v^2}$ : mittlere quadratische Geschwindigkeit der Wasserstoffatome,  $G$ : Gravitationskonstante).

In einem gebundenem System muß die Gesamtenergie  $E$  negativ sein, das heißt, die potentielle Energie muß betragsmäßig größer als die kinetische Energie sein. Da die potentielle Energie stärker mit dem Radius als die kinetische wächst, kann die Wolke einen gebundenen Zustand erreichen. Das kann auf zwei Wegen geschehen: durch Kompression und durch Akkretion. Kompression bedeutet die Erzeugung von Dichtewellen, die durch die Wolke laufen. Diese werden zum Beispiel durch Supernova-Explosionen oder durch vorbeiziehende Sterne erzeugt.

Akkretion heißt, daß die Wolke Materie aus ihrer Umgebung einsammelt und so sich ihr Durchmesser vergrößert. Dies geschieht in kosmologischen Zeiträumen, das heißt, der Vorgang benötigt etwa eine Milliarde Jahre. Den Radius dieser kollabierenden Wolke kann man leicht abschätzen, indem man  $E$  zu Null setzt. Dann folgt für den kritischen Radius  $R_k = \frac{6}{5} \frac{GM}{v^2}$ .

Der Kollaps wird durch Gegenkräfte angehalten, die im folgenden diskutiert werden.

### 2.1.2 Quasihydrodynamisches Gleichgewicht

Wir nehmen eine sphärische Massenverteilung an und betrachten eine Schale der infinitesimalen<sup>1</sup> Dicke  $\Delta r$  vom Radius  $r$ . Deren Volumen ist  $4\pi r^2 \Delta r$ , ihre Masse  $\Delta M_S = 4\pi r^2 \rho \Delta r$ . Auf diese Schale wirkt die Kraft  $\Delta F_S = -\frac{GM_S \Delta M_S}{r^2}$ . Die Gesamtkraft lautet demnach:

$$\Delta F_{\text{ges}} = 4\pi r^2 \Delta P - \frac{GM_r \Delta M_r}{r^2} = a_{\text{ges}} \Delta M_r \quad . \quad (2.2)$$

Daraus ergibt sich die Gesamtbeschleunigung  $a_{\text{ges}}$  zu

$$a_{\text{ges}} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta r} - \frac{GM}{r^2} \quad \text{wobei} \quad \Delta P = P_2 - P_1 \quad . \quad (2.3)$$

Hier können wir jetzt einige Fälle betrachten:

1.  $a_{\text{ges}} = 0$ : Gleichgewicht
2.  $a_{\text{des}} \simeq 0$ : Kleine Beschleunigung, sog. quasihydrostatisches Gleichgewicht QHE (quasihydrostatic equilibrium)
3.  $a_{\text{ges}} > 0$ : expandierende Wolke
4.  $a_{\text{ges}} < 0$ :
  - (a)  $\frac{\Delta P}{\Delta r} > 0$ : nicht physikalisch
  - (b)  $\left| \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta r} \right| < \left| \frac{GM}{r^2} \right|$ : schlimmstenfalls freier Fall, Kollaps

Ein Stern (Materieansammlung) ist immer bestrebt, ins QHE zu gelangen, insbesondere ist eine Kontraktionsphase dann beendet, wenn der Stern sich wieder im QHE befindet.

---

<sup>1</sup> $\Delta x$  bezeichnet die infinitesimale Größe zu  $x$



### 2.1.3 Die Gasgleichung

Um den Tatsachen Rechnung zu tragen, daß ein Stern erstens nicht nur aus einer Teilchensorte besteht, zweitens die Teilchen manchmal ionisiert sind und daß drittens das Volumen keine dem Problem angemessene Größe ist, wird die Gasgleichung  $PV = NkT$  in eine passende Form gebracht. Es seien  $x, y, z$  die Massenanteile H, He und Metall (= alles, was schwerer als He ist), also  $x = M_{\text{H}}/M$ ,  $M_{\text{H}}$ : Gesamtmasse des Wasserstoffs usw. Dann kann man die Anzahl der Teilchen ausrechnen (nicht ionisiert):

$$N_{\text{H}} = \frac{M_{\text{H}}}{m_{\text{H}}} = \frac{xM}{m_{\text{H}}} \quad (2.4)$$

$$N_{\text{He}} = \frac{M_{\text{He}}}{m_{\text{He}}} = \frac{M_{\text{He}}}{4m_{\text{H}}} = \frac{yM}{4m_{\text{H}}} \quad (2.5)$$

$$N_{\text{Me}} = \frac{M_{\text{Me}}}{m_{\text{Me}}} = \frac{M_{\text{Me}}}{Am_{\text{H}}} = \frac{zM}{m_{\text{AH}}} \quad (2.6)$$

$$N_{\text{tot}} = \underbrace{\left(x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{A}z\right)}_{\frac{1}{w}} \frac{M}{m_{\text{H}}} \quad (2.7)$$

Im Falle vollständiger Ionisierung liefert ein Atom mit  $A$  Nukleonen  $Z$  Elektronen, damit haben wir  $Z+1$  Teilchen. Daher müssen die vorhergehenden Gleichungen um entsprechende Vorfaktoren verändert werden:

$$N_{\text{H}} = 2x \frac{M}{m_{\text{H}}}, \quad (2.8)$$

$$N_{\text{He}} = \frac{3}{4}y \frac{M}{m_{\text{H}}}, \quad (2.9)$$

$$N_{\text{Me}} = \frac{Z+1}{A}z \frac{M}{m_{\text{H}}} \simeq \frac{1}{2}z \frac{M}{m_{\text{H}}} \quad (2.10)$$

$$N_{\text{tot}} = \left(2x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{2}z\right) \frac{M}{m_{\text{H}}} = \left(\frac{1}{w}\right)_{\text{ion}} \frac{M}{m_{\text{H}}} \quad (2.11)$$

Jetzt kann die Gasgleichung umgeschrieben werden:

$$PV = \frac{1}{w} \frac{M}{m_{\text{H}}} kT, \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{M}{V} \Rightarrow P = \frac{\rho kT}{wm_{\text{H}}} \quad (2.12)$$

Aus dieser Gleichung kann man schließen, daß ein Druckgradient drei Ursachen haben kann:

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} \propto \frac{\Delta T}{\Delta r} : \text{Temperaturgradient} \quad (2.13)$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} \propto \frac{\Delta \rho}{\Delta r} : \text{Dichtegradient} \quad (2.14)$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} \propto \frac{\Delta w^{-1}}{\Delta r} : \text{Teilchengradient} \quad (2.15)$$

Später werden wir sehen, wie all diese Gradienten dazu beitragen, daß ein Stern nicht kollabiert.

## 2.2 Thermonukleare Prozesse

### 2.2.1 Eine weitere Energiequelle: Kernfusion

Sterne wie die Sonne beziehen ihre Energie aus der Verschmelzung von Wasserstoff zu Helium oder ähnlichen Prozessen. Aus dem Verlauf der Kurve der mittleren Bindungsenergie pro Nukleon in Abhängigkeit von der Massenzahl kann man folgern, daß man durch Fusion von Nukliden, die leichter als die eisenartigen Metalle sind, Energie gewinnen kann. Für den Nettoprozess



sind Temperaturen von  $10^7$  K <sup>2</sup>nötig. Gravitation und Kernfusion sind jetzt zwei gegeneinander wirkende Mechanismen: Durch die Fusion erhöht sich die Sterntemperatur im Core und infolge dessen auch der Druck. Dieser Druck wirkt der Gravitation entgegen.

### 2.2.2 Entwicklung zum Roten Riesen

#### Prozesse im Inneren eines Sterns

Der Stern besteht aus zwei Teilen: einem Core, in dem Wasserstoff zu Helium fusioniert wird, und einer äußeren, "kälteren" Hülle. Im Core reichert sich mit der Zeit immer mehr Helium an, dabei wird die Teilchenanzahl kleiner, nach der Gasgleichung nimmt damit auch der Druck ab, und der Kern zieht sich zusammen.

---

<sup>2</sup>Die Geschwindigkeit der Protonen unterliegt einer Maxwellverteilung mit einer mittleren Geschwindigkeit von  $10^7$  K. Eine solche Energie würde allein nicht ausreichen, um die Coulomb-Abstoßung zu überwinden, aber die Anzahl der Teilchen im Schwanz der Verteilung mit einer entsprechenden Geschwindigkeit ist groß genug, um die Fusion aufrecht zu erhalten.

An der Grenzfläche stimmen Druck und Temperatur von Hülle und Core überein, aus der Gasgleichung folgt dann  $\frac{\rho_1}{w_1} = \frac{\rho_2}{w_2}$ . Da  $w_1$  mit der Zeit wächst, nimmt die Dichte des Core zu. Seine Masse bleibt aber konstant (den Massendefekt kann man vernachlässigen), so daß das Volumen des Sterns schrumpft. Bei der Kontraktion des Cores nimmt jedoch die Gravitationsenergie weiter ab, die freigesetzte Gravitationsenergie erhöht die Gesamtleuchtkraft des Sterns, und der Temperaturgradient im Reststern wird größer. Aus Gl. (2.3) und der Gasgleichung folgt, daß die Hülle sich ausdehnen muß: Wir haben ein kontrahierendes Core und eine expandierende Hülle. Der Stern kann sich dabei nicht aufheizen, da die Energie zur Expansion verwendet wird.

Es gibt aber noch einen anderen Prozeß. An der Oberfläche des Sterns wächst mit der Expansion die potentielle Energie eines Teilchen. Weil die Energie aber konstant ist, muß seine kinetische Energie abnehmen, infolgedessen auch seine Oberflächentemperatur. Währenddessen nimmt im Core die Anzahl der Protonen ab. Da sich die Emissivität wie  $\epsilon_{pp} = x^2 T^4$  verhält, nimmt die Fusionsrate ab ( $x$  wird kleiner) damit einher geht eine verminderte Kerntemperatur und Leuchtkraft. Dies wiederum führt zu einer Kontraktion des Sterns, wodurch sich ein neues Gleichgewicht einstellen kann. Es gibt also zwei gegeneinander wirkende Prozesse, welcher davon die Oberhand gewinnen kann, hängt von der Masse des Sterns ab. Die weitere Entwicklung des Sterns hängt von seiner Masse ab.

### Alterung des Sterns

Die Alterung beginnt mit der Bildung eines festen homogenen Heliumcores. Die Temperatur ist für ein Zünden des nächsten möglichen Prozesses, nämlich  $3\alpha \rightarrow {}^{12}\text{C}$ , zu niedrig ( $10^8 \text{ K}^3$  sind nötig,  $\alpha = {}^4\text{He}^{2+}$ ). Das Core ist somit tot, seine Leuchtkraft Null, man sagt, daß das Core jetzt isotherm sei (da  $\frac{dT}{dr} = 0$ ). Der Stern würde gerne im QHE bleiben, im Core gibt es keinen Temperaturgradienten, also auch keinen daraus resultierenden Druckgradienten. Aber der Stern kann einen Dichtegradienten entwickeln:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{d\rho}{dr} \frac{kT}{wm_H} = -\rho \frac{GM}{r^2} \quad . \quad (2.17)$$

Dies geschieht so: Das isotherme Core kann die Hülle nicht länger tragen, der Stern kontrahiert, dabei wird Gravitationsenergie frei, und es besteht die Möglichkeit, daß dadurch eine Schale um das Core herum eine Temperatur zum Fusionieren von Wasserstoff erreicht.

Diese Schale sorgt jetzt für den Dichtegradienten und die Entwicklung zum Roten Riesen: Sollte der Radius der Schale schrumpfen, bewegt sie sich in Richtung größerer Dichte und Temperatur. Da die Emissivität proportional mit der Dichte wächst, wird die

---

<sup>3</sup>siehe eben

Energieproduktion so lange größer, bis Energieabgabe ( $\propto L$ ) und Energieproduktion ( $\propto \epsilon_{pp}$ ) sich ausgleichen. Bei der Gleichgewichtstemperatur ist der Druck nach außen größer, so daß die nach innen gerichtete Kraft kompensiert werden kann. Eine Störung dieser Gleichgewichtslage führt zu einer gedämpften Schwingung um diese Position und deshalb bleibt der Schalenradius konstant. Da  $r_S$  sich nicht ändert, ist auch das eingeschlossene Corevolumen und die Coremasse konstant, folglich auch die mittlere Dichte. Der Strahlungsstrom aus der Schale richtung Core drückt diesen zusammen. Dadurch wird seine Dichte größer, die Dichte der Schale muß kleiner werden. Es gibt deshalb einen Dichtegradienten, der den Einsturz des Sterns verhindern kann.

Aber es passiert noch mehr: Da die Masse der Hülle sich ebenfalls nicht ändert, die Dichte an der Oberfläche Null ist und die mittlere Dichte abnimmt, dehnt der Stern sich aus, solange das Core zusammengedrückt wird. Damit steuert die Schale zugleich das Core und die Hülle. Durch das Ausdehnen der Hülle wird die Oberfläche des Sterns kühler. Ab einem bestimmten Punkt wird die Energiezufuhr in die Hülle von Konvektion bestimmt. Das stabilisiert die Oberflächentemperatur. Der Stern erscheint rötlich, er ist zu einem Roten Riesen geworden.

### 2.2.3 Entartung der Elektronen

#### Entartung der Materie

Entartung heißt, daß die mittlere kinetische Energie der Fermionen – in unserem Falle sind das die Elektronen – kleiner als die Fermi-Energie ist. Fast alle Energiezustände unterhalb der Fermi-Energie sind besetzt. Aus der Temperatur und der Teilchendichte läßt sich abschätzen, ob ein Gas entartet ist oder nicht. Fermi-Impuls und Fermi-Energie sind gegeben durch:

$$p_F = \hbar \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3}, \quad (2.18)$$

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3}, \quad (\text{nichtrelativistisch}) \quad (2.19)$$

$$E_F \approx c\hbar \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3}, \quad (\text{relativistisch}) \quad (2.20)$$

Betrachten wir als Beispiel die Sonne. Ihre mittlere Dichte beträgt  $\rho \approx 1.4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Ihre Masse wird hauptsächlich von Protonen getragen, deren Masse  $1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  beträgt. Somit befinden sich  $10^{30}$  Protonen in einem  $\text{m}^3$ , was auch der Elektronendichte entspricht, da die Sonne elektrisch neutral ist. Die Fusion findet bei  $10^7 \text{ K} = 800 \text{ eV}$  statt, man

kann also nichtrelativistisch rechnen. Der Fermi-Impuls beträgt  $\approx 6200 \text{ eV}$ , und damit die Fermi-Energie  $38 \text{ eV}$  für die Elektronen und  $2 \cdot 10^{-2} \text{ eV}$  für die Protonen. Beide Gase sind also nicht entartet. Beim Übergang eines Sterns wie der Sonne zum Roten Riesen kann der Fermi-Druck einen beträchtlichen Beitrag zum Gesamtdruck leisten: Wir nehmen einen Coreradius von  $\frac{1}{70} R_{\odot} = 10^7 \text{ m}$  an, eine Masse von  $0.2 M_{\odot}$  und eine Temperatur von  $2 \cdot 10^7 \text{ K} = 2 \cdot 10^3 \text{ eV}$ . Daraus folgt eine Teilchendichte (Helium) von  $n_{\text{He}} = 16 \cdot 10^{33} \text{ m}^{-3}$  und  $n_e = 32 \cdot 10^{33} \text{ m}^{-3}$ . Der Fermi-Impuls ist  $p_{F,e} = ch \left( \frac{3n_e}{8\pi} \right)^{1/3} \approx 10^5 \text{ eV}$ , woraus eine Fermi-Energie von  $10^4 \text{ eV}$  folgt. Folglich sind die Elektronen teilweise entartet.

Es hängt jetzt von der Masse des Sterns ab, ob der Fermi-Druck der Elektronen (oder der Neutronen) den Kollaps des Sterns verhindern kann. Wenn der Stern schrumpft, werden die Elektronen zum Atomkern hin gedrückt, d. h., der ihnen zur Verfügung stehende Raum wird kleiner. Nach Gl. (2.18) und (2.19) wächst ihre kinetische Energie und damit auch der Fermi-Druck.

### 2.2.4 Weitere Entwicklung

Gemäß Arnett [Arn96] kann man sich die weitere Entwicklung des Heliumcores näherungsweise so wie die Entwicklung des Wasserstoff fusionierenden Sterns vorstellen. Der nächste Prozeß nach der Fusion von Wasserstoff ist der  $3\alpha$ -Prozeß:



Aber zuerst muß die Entartung des Cores überwunden werden. Wie oben erwähnt besteht das Core eines gealterten H-fusionierenden Sterns aus festem Helium. Das Core wird aber von den darüber liegenden Materieschichten zusammengedrückt und heizt sich dabei auf. Es kann sich aber nicht wie ein Gas ausdehnen. Sobald eine Temperatur von  $1.5 \cdot 10^8 \text{ K}$  erreicht ist, setzt der  $3\alpha$ -Prozeß ein. Die zusätzliche Energie kann nicht schnell genug abgeführt werden, obwohl die Wärmeleitfähigkeit eines entarteten Elektronengases gut ist: Es kommt zu einer Explosion, dem sogenannten Helium-Flash. Dadurch wird die Coredichte und die Temperatur vermindert, die Elektronen sind nicht mehr entartet. Die Gravitation ist aber so stark, daß sie die Explosion so weit dämpfen kann, daß kein Material ausgeschleudert wird. Es setzt eine weitere Phase der Kontraktion ein. Dadurch kann im Core des Sterns, der zur Zeit keine nukleare Energiequelle besitzt, wieder die Temperatur für den  $3\alpha$ -Prozeß erreicht werden. Die Kernfusion läuft diesmal kontrolliert ab, weil das Core gasförmig und nicht fest ist. Die bei der Wasserstofffusion entstandene Asche ist also in einem Folgeprozeß zur Energiegewinnung genutzt worden.

Insgesamt gibt es sechs solcher Fusionsprozesse. Dies führt dazu, daß ein ausgebrannter Stern einen schalenförmigen Aufbau (ähnlich einer Zwiebel) besitzt, weil die Asche des

vorausgegangenem Prozess der Brennstoff des nächsten ist. Das funktioniert solange, bis die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon ein Maximum erreicht hat. Dieser Fall tritt bei den eisenartigen Metallen (Ni, Co, Fe) ein. Die Hauptprozesse sehen im einzelnen so aus (siehe [Arn96],[BB85]):

1.  $4p \longrightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\bar{\nu}$  bei  $T \approx 10^7$  K
2.  $3\alpha \longrightarrow {}^{12}\text{C} + \gamma$ ,  ${}^{12}\text{C} + \alpha \longrightarrow {}^{16}\text{O}$  bei  $T \approx 1,5 \cdot 10^8$  K
3.  ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C} \longrightarrow {}^{20}\text{Ne} + \alpha$ , oder  ${}^{24}\text{Mg} + {}^{16}\text{O} + {}^4\text{He} \longrightarrow {}^{20}\text{Ne}$  bei  $T \approx 1 \cdot 10^9$  K
4.  ${}^{20}\text{Ne} + \alpha \longrightarrow {}^{24}\text{Mg} + \gamma$  bei  $T \approx 1,5 \cdot 10^9$  K
5.  ${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O} \longrightarrow {}^{32}\text{S}$  oder  ${}^{28}\text{Si} + \alpha$  bei  $T \approx 2 \cdot 10^9$  K
6.  ${}^{28}\text{Si} + {}^{28}\text{Si} \longrightarrow {}^{56}\text{Ni} \longrightarrow {}^{56}\text{Fe} + 2e^+ + 2\bar{\nu}$  bei  $T \approx 3 \cdot 10^9$  K

In Abb. 2.1 ist der schalenförmige Aufbau eines Sterns von  $25 M_\odot$  skizziert, der alle Fusionsprozesse durchlaufen hat.

Diese Reaktionen sind nur die wesentlichen Prozesse, daneben laufen noch viele weitere Reaktionen ab, die für die Nukleosynthese wichtig sind. Das setzt aber voraus, daß der Stern ausreichend Masse hat, so daß die Gravitation den Stern genügend zusammenquetschen kann. Der innerste Prozeß erzeugt Eisen, das Element mit der höchsten Bindungsenergie pro Nukleon. Die weitere Entwicklung hängt jetzt von der Masse und der Elektronenanzahl pro Nukleon dieses Eisenkerns ab. Die Grenzmasse zwischen Stabilität und Instabilität ist gerade die Chandrasekhar-Grenze, wird sie überschritten, ist Stabilität nicht möglich. Wenn der Stern es schafft, in einer Supernova-Explosion genügend Masse abzustößen, bleibt ein kleiner, extrem dichter Neutronenstern übrig (für diesen gilt aber ein analoges Stabilitätsargument wie für den Weißen Zwerg), ansonsten ein Schwarzes Loch.

### 2.2.5 Die Chandrasekhar-Grenze

Im letzten Abschnitt habe ich die Chandrasekhar-Grenze erwähnt. Nun soll an dieser Stelle ein Ausdruck für diese Grenzmasse hergeleitet werden. Dabei stütze ich mich auf [Wei72].

#### Differentialgleichung für die Sternstruktur

Wir nehmen an, die Sternmaterie verhalte sich wie eine ideale, isotrope Flüssigkeit, d. h. keine Raumrichtung ist ausgezeichnet. Die mittlere freie Weglänge im Inneren des Sterns sei kleiner als die Längenskala eines Beobachters, d. h. die innere Struktur der Flüssigkeit

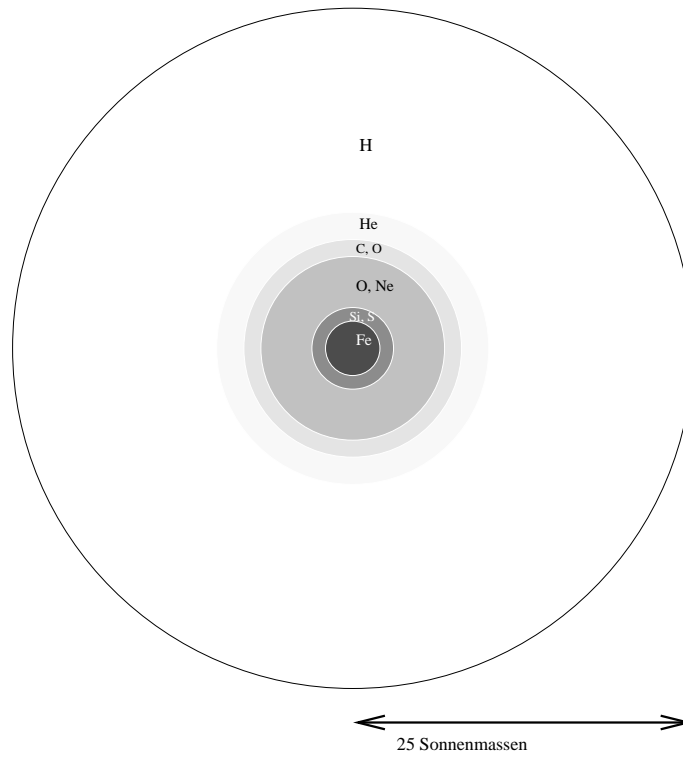


Abbildung 2.1: Aufbau eines Sterns, der seinen gesamten Brennstoff aufgebraucht hat, nach [BB85]

spiele keine Rolle. Außerdem sei die Flüssigkeit für den Beobachter in Ruhe. Dann können wir den Energie-Impuls-Tensor hinschreiben:

$$T^{00} = u, T^{0i} = T^{i0} = 0, T^{ij} = P\delta^{ij} \quad , \quad (2.23)$$

wobei  $u$  die Energiedichte und  $P$  den Druck bezeichnen. Die zugrundeliegende Metrik soll statisch und isotrop sein ( $\tau$ : Eigenzeit):

$$d\tau^2 = F(r)dt^2 - 2E(r)dtdr - D(r)r^2dr^2 - C(r)(dr^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2 + r^2d\theta^2) \quad . \quad (2.24)$$

Durch eine geeignete Transformation der Zeit kann man den in der Raumzeit gemischten Anteil zum Verschwinden bringen:  $t \mapsto t + \Phi(r)$ , außerdem transformiert man  $r \mapsto \sqrt{C(r)}r$ . Man erhält nach einer kurzen Rechnung:

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2) \quad \text{mit} \quad (2.25)$$

$$A(r) = \left(1 + \frac{G(r)}{C(r)}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{rC'(r)}{C(r)}\right)^{-2}, \quad B(r) = F(r) \quad (2.26)$$

$$\text{und der Nebenbedingung} \quad \Phi'(r) = -\frac{rE(r)}{F(r)} \quad . \quad (2.27)$$

Hier ist  $f'$  die Abkürzung für  $\frac{df}{dr}$ . Damit sieht unsere Metrik wie folgt aus:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -B(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{B(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix} \quad . \quad (2.28)$$

Das Ziel ist es, die Einstein-Gleichungen für ein solches System zu lösen. Allgemein lauten sie:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad . \quad (2.29)$$

Der Energie-Impuls-Tensor auf der rechten Seite der Gleichung ist bekannt, siehe Gleichung (2.23). Ricci-Tensor und -Skalar ergeben sich aus:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\rho} \quad , \quad (2.30)$$

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad . \quad (2.31)$$

Die Christoffelsymbole  $\Gamma^\sigma_{\lambda\mu}$  sind wie folgt definiert:

$$\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} = g^{\nu\sigma}(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda}) \quad . \quad (2.32)$$



Nach einer längeren Rechnung folgen dann die Einstein-Gleichungen:

$$R_{rr} = \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rA} = -4\pi G(\rho - P)A \quad (2.33)$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A} \left( -\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{A} = -4\pi G(\rho - P)r^2 \quad (2.34)$$

$$R_{tt} = -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{2A} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rA} = -4\pi G(\rho - 3P)B \quad (2.35)$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \quad (2.36)$$

$$R_{\mu\nu} = 0, \text{ falls } \mu \neq \nu \quad (2.37)$$

mit der Dichte  $\rho$ . Zusätzlich benötigen wir eine Gleichung für hydrodynamisches Gleichgewicht. Aus  $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$  folgt

$$\frac{B'}{B} = -\frac{2P'}{P + \rho} \quad (2.38)$$

Bildet man  $\frac{R_{rr}}{2A} + \frac{R_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{R_{tt}}{2B}$ , so erhält man die Gleichung:

$$\left( \frac{r}{A} \right)' = 1 - 8\pi G \rho r^2 \Rightarrow A = \left( 1 - \frac{2G}{r} \underbrace{\int_0^r 4\pi x^2 \rho dx}_{M(r)} \right)^{-1}. \quad (2.39)$$

Dies setzen wir in Gleichung (2.34) ein, und es folgt nach einigen Umformungen

$$-r^2 \frac{d}{dr} P(r) = GM(r) \rho(r) \left( 1 + \frac{\rho(r)}{P(r)} \right) \left( 1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)} \right) \left( 1 - \frac{2GM(r)}{r} \right)^{-1}. \quad (2.40)$$

### Newtonsche Sterne

Wir betrachten jetzt Sterne, deren innere Energie und Druck viel kleiner als ihre Restmassendichte sind, wo relativistische Effekte keine Rolle spielen. Dann vereinfacht sich Gleichung (2.40) zu (siehe [Wei72]):

$$\frac{d}{dr} \frac{r^2}{\rho(r)} \frac{d}{dr} P(r) = -4\pi G r^2 \rho(r) \quad (2.41)$$

Eine Variablentransformation

$$\rho = \rho(0) \Theta^{1/(\gamma-1)}, \quad p = K \rho(0)^\gamma \Theta^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad r = \left( \frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right) \rho(0)^{(\gamma-2)/2} x \quad (2.42)$$

führt zur sogenannten Lane-Emden-Gleichung:

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} x^2 \frac{d}{dx} \Theta + \Theta^{1/(\gamma-1)}, \Theta(0) = 1, \quad \Theta'(0) = 0 . \quad (2.43)$$

Für  $\gamma > \frac{6}{5}$  hat die Lösungsfunktion eine Nullstelle bei  $x_1$ , d. h. Druck und Dichte verschwinden bei  $x_1$ . Damit folgen der Sternradius  $R$  und die Sternmasse  $M$  zu (mit den Bezeichnungen aus [Wei72])

$$R = \sqrt{\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)}} \rho(0)^{(\gamma-2)/2} x_1, \quad (2.44)$$

$$M = 4\pi \rho(0)^{(3\gamma-4)/2} \left( \frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{3/2} x_1^{-(3\gamma-4)/(\gamma-2)} x_1^2 |\Theta'(x_1)|^2 . \quad (2.45)$$

### Bedingung für Stabilität

Nun können wir eine Bedingung angeben, wann ein Stern stabil ist. Dazu betrachten wir seine Energie

$$E = T + V = \underbrace{\frac{KM}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1}}_a - \underbrace{\frac{3}{5} \left( \frac{4}{3} \pi \right)^{1/3} GM^{5/3} \rho^{1/3}}_b . \quad (2.46)$$

Damit ein Stern instabil werden kann, muß er in Bezug auf seine zentrale Dichte bei konstanter Entropie pro Nukleon und konstanter chemischer Zusammensetzung gemäß Theorem 1 aus [Wei72] stationär werden, das heißt, es muß

$$\frac{\partial E(\rho(0))}{\partial \rho(0)} = 0, \quad \frac{\partial N(\rho(0))}{\partial \rho(0)} = 0 \quad (2.47)$$

gelten mit  $N$  der Nukleonenzahl. Wendet man dieses Kriterium auf den Ausdruck oben an, so liegt für  $\gamma > \frac{4}{3}$  ein Minimum von  $E$  vor, das heißt stabiles Gleichgewicht:

$$\rho = \left( \frac{b}{3a(\gamma-1)} \right)^{1/(\gamma-4/3)} . \quad (2.48)$$

$\gamma < \frac{4}{3}$  liefert instabiles Gleichgewicht. Der Fall  $\gamma = \frac{4}{3}$  erfordert  $a = b$ , damit verschwindet die Energie.

### Anwendung auf Weiße Zwerge

Die relativistische kinetische Energie eines Teilchens ist gegeben durch

$$E_{\text{kin}} = \sqrt{p^2 + M^2} - M \quad . \quad (2.49)$$

Wir nehmen an, daß die Temperatur gegenüber der kinetischen Energie des Teilchens vernachlässigbar sei. Die Dichte der kinetischen Energie  $e$  und der Druck der Elektronen  $p$  in einem Weißen Zwerg sind gegeben durch (Rechnungen ab sofort in natürlichen Einheiten, d.h.  $\hbar = c = 1$ )

$$e = \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} \left( \sqrt{k^2 + m_e^2} - m_e \right) k^2 dk \quad (2.50)$$

$$p = \frac{8\pi}{3(2\pi)^3} \int_0^{k_F} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m_e^2}} k^2 dk \quad (2.51)$$

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} = \left( \frac{3\pi^2 \rho}{m_N \mu} \right)^{1/3}, \quad \rho = n \underbrace{\frac{n_B}{n}}_{n_e} m_N \quad (2.52)$$

$$k_F : \text{Fermi-Impuls, } n_e : \text{Anzahl der Baryonen pro Elektron} \quad . \quad (2.53)$$

Zwei Extremfälle sind leicht zu diskutieren:  $k_F \ll m_e$  und  $k_F \gg m_e$ . Im ersten Fall gilt:

$$p = \frac{8\pi}{15m_e(2\pi)^3} k_F^5 = \frac{1}{15m_e\pi^3} \left( \frac{3\pi^2}{m_N n_e} \right)^{5/3} \rho^{5/3}; \quad e = \frac{3}{2}p \quad . \quad (2.54)$$

Das ergibt unter Verwendung von Gl. (2.45) eine Masse von

$$M = 2.79 \left( \frac{\rho(0)}{\rho_c} \right)^{1/2} \frac{M_\odot}{m_e^2} \quad (2.55)$$

$$\rho_c : \text{Dichte, wo der Fermi-Impuls gleich der Elektronmasse ist} \quad (2.56)$$

Im zweiten Fall kann die Elektronmasse überall vernachlässigt werden:

$$p = \frac{8\pi}{12(2\pi)^2} k_F^4 = \frac{1}{12\pi^2} \left( \frac{3\pi^2}{m_N \mu} \right)^{4/3} \rho^{4/3}; \quad e = 3p \quad (2.57)$$

$$M = 5.87 \frac{M_\odot}{n_e^2} \quad \textbf{Chandrasekhar-Grenze} \quad . \quad (2.58)$$

In beiden Fällen haben wir es mit Polytropen zu tun: Im ersten Fall mit einem Adiabatenexponenten von  $\gamma = 5/3$ , im zweiten Fall ist  $\gamma = 4/3$ . Weiße Zwerge können unter diesen Voraussetzungen der Gravitation standhalten und sind bis zu der Grenzmasse in Gl.(2.58) stabil.

Materie verhält sich aber etwas anders. Ab einer gewissen Größe des Fermi-Impulses wird Elektroneneinfang energetisch günstiger, so daß die Anzahl der Baryonen pro Elektron wächst. Dies wiederum reduziert die Grenzmasse. Man kann zeigen, daß an diesem Punkt Stabilität in Instabilität umschlägt (s.[Wei72]).

## 2.3 Endzustände der Sternentwicklung

In diesem Abschnitt werden Endzustände der Sternentwicklung erläutert. Es gibt genau drei Endstadien der Sternentwicklung:

- Weißer Zwerg
- Neutronenstern
- Schwarzes Loch

Der Endzustand eines Sterns hängt von seiner Anfangsmasse ab und von den äußeren Lebensbedingungen. So können Materieströme von einem Begleiter des Sterns seine Masse erhöhen und dafür sorgen, daß die Entwicklung weitergeht.

### 2.3.1 Weiße Zwerge

Irgendwann ist der gesamte Brennstoff eines Sterns aufgebraucht. Der thermische Druck kann der Gravitation nicht weiter standhalten. Bei kleinen Massen verhindert die elektrostatische Abstoßung der Elektronen einen Kollaps. Ab einer Dichte von  $80 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  tritt wie beim Roten Riesen Entartung der Materie ein. Der Stern kühlt ab. Ist die Masse des Cores kleiner als die Chandrasekhar-Grenze, und gibt es auch keine allzu schwere Hülle, so entwickelt sich der Stern zu einem Weißen Zwerg. Sein Radius beträgt einige tausend Kilometer. Die Elektronen im Inneren des Cores sind relativistisch entartet und können dadurch den Kollaps des Sterns verhindern. Die äußeren Schichten des Cores sind weniger dicht, und die Elektronen sind nicht entartet. Diese äußere Schicht wirkt als Isolation gegenüber dem Außenraum. Durch das Schrumpfen gewinnt der Stern Energie aus dem Gravitationsfeld und strahlt diese Energie in langen Zeiträumen ab, der Weiße Zwerg strahlt weiß-bläulich.

Hat der Stern dagegen eine schwere Hülle, so kann der Kern sich so weit aufheizen, daß Helium zu Kohlenstoff verbrannt wird.

### 2.3.2 Neutronensterne

Ist das Core des Sterns schwerer als die Chandrasekhar-Grenze, wird der Stern instabil. Elektroneneinfang wird jetzt energetisch günstiger, wodurch sich die Zustandsgleichung der Materie ändert und ein neues Gleichgewicht erreicht wird. In Gl. (2.58) kann für leichte Neutronensterne die Elektronenmasse  $m_e$  durch die Neutronenmasse  $m_n$ , ersetzt werden, und  $n_e$  wird gleich 1 gesetzt. Bei schwereren Neutronensternen bricht die Analogie zum Weißen Zwerg zusammen, weil die Materie eines Weißen Zwergs aus nichtrelativistischen Nukleonen besteht, während die Nukleonen eines Neutronensterns (von einer Sonnenmasse) eine kinetische Energie im Bereich ihrer Ruhmasse haben. Neutronen sind gegen  $\beta$ -Zerfall stabil, wenn der Fermi-See der Elektronen im Core mindestens bis zum maximalen Elektronenimpuls der beim  $\beta$ -Zerfall entstehenden Elektronen aufgefüllt ist. Dieser maximale Impuls beträgt etwa 1.2 MeV ([Wei72]). Im Core sind bei diesen hohen Dichten die Elektronen entartet. Ihr chemisches Potential beträgt am Anfang etwa 6 MeV ([BBAL79]). Es bildet sich ein  $\beta$ -Gleichgewicht aus, so daß am Ende das chemische Potential der Elektronen gleich der Differenz der chemischen Potentiale von Neutronen und Protonen ist:  $\mu_e = \mu_n - \mu_p$ .

Im letzten Schritt wird bei massiven Sternen Silizium zu Eisen verbrannt. Dies geschieht innerhalb eines Tages. Wenn der thermische Druck wegfällt, schrumpft der Stern. Dabei werden die Elektronen in die Atomkerne gepreßt. Ab einer bestimmten Dichte wird Elektroneneinfang für den Stern energetisch günstiger. Dabei werden Neutrinos freigesetzt. Es werden aber nicht alle Protonen in Neutronen umgewandelt, sonst wäre der Stern instabil gegenüber  $\beta$ -Zerfall. In dieser Umgebung können sogar Myonen und andere exotische Teilchen wegen des Pauli-Blocking stabil sein! Elektroneinfang reduziert den Fermi-Impuls und somit den Druck und leitet einen Kollaps des Kerns ein, der von einer Explosion begleitet sein kann. Dabei wird die äußere Hülle weggesprengt. Dieses Ereignis ist eine Typ II-Supernova. Übrig bleibt ein extrem dichter Neutronenstern, sofern der Stern genügend Materie losgeworden ist. Dieser wird von den nichtrelativistisch entarteten Neutronen am weiteren Kollaps gehindert. Die Rolle der Elektronen haben die Neutronen übernommen. Die Rechnung von Chandrasekhar kann im wesentlichen übernommen werden, man muß nur Elektronen durch Neutronen ersetzen. Dies führt zu einer Grenzmasse in derselben Größenordnung. Der resultierende Stern ist kleiner und dichter.

Außen ist der Stern von einer festen Kruste aus Protonen in fester Phase umgeben. Die Elektronen sind relativistisch entartet und werden von den Atomkernen nicht beeinflusst. Im Inneren des Sterns befindet sich eine "Neutronenflüssigkeit".

### 2.3.3 Schwarze Löcher

Ist der Stern zu massiv und schafft er es nicht, genug Materie los zu werden, kann der Entartungsdruck der Fermionen der Gravitation nichts mehr entgegensetzen. Der Stern kollabiert zu einem Schwarzen Loch.

## 2.4 Sternkollaps und Neutrinokühlung

In diesem Abschnitt wird die Explosion (Typ II-Supernova) eines massiven ( $\approx 20 - 25 M_{\odot}$ ) gealterten Sterns genauer betrachtet (nach [BB85]).

### Beginn des Kollaps

Wir beginnen mit dem Zeitpunkt, wo die Verbrennung von Silizium zu Eisen einsetzt. Dieser Prozeß dauert etwa einen Tag, während die anderen Prozesse in längeren Zeiträumen stattgefunden haben. Innerhalb dieses Tages bildet sich ein Core aus Eisen, der die Chandrasekhar-Grenze übersteigt. Dieses Core kann nicht mehr durch den Elektronendruck stabilisiert werden, es implodiert zuerst, um dann zu explodieren.

Wenn die Implosion einsetzt, wird das Core komprimiert. Das führt zu einer Temperaturerhöhung, aber nicht unbedingt zu einem höheren Druck. Der Grund ist folgender: Der Druck hängt ab von der Anzahl der Teilchen und deren mittlerer Energie (ideales Gas: Druck ist proportional zur Teilchendichte und zur Temperatur). Im Core befinden sich Elektronen und Eisenkerne. Da ein Eisenkern aus 56 Nukleonen aufgebaut ist und weniger Eisenkerne als Elektronen zur Verfügung stehen, ist der Beitrag der Elektronen zum Gesamtdruck wesentlich größer als der Beitrag der Eisenkerne. Durch das Aufheizen werden einige Eisenkerne in kleinere Bruchstücke zerlegt, dieser Vorgang benötigt soviel Energie, wie bei deren Produktion freigesetzt wurde. Diese Energie wird den Elektronen entzogen, wodurch deren Druck sinkt. Durch das Aufspalten dieser Eisenkerne steigt der Druck der Nukleonen, aber bei weitem nicht so stark, daß der Druckabfall durch die kühleren Elektronen kompensiert werden kann. Die Folge dieses Druckabfalls ist eine Beschleunigung des Kollapses.

### Die Entropie

An dieser Stelle ist eine Bemerkung zur Entropie angebracht. Der Kollaps ist kein chaotischer Prozeß, wie es auf den ersten Blick scheint. In einer Wasserstoffwolke ist die Entropie hoch, die ja ein Maß für die Unordnung ist. In dem Core eines kollabierenden Sterns sind aber 56 Nukleonen zu einem Eisenkern geordnet, folglich ist die Entropie pro Nukleon klein. Photonen und Neutrinos haben im Laufe der Zeit die fehlende Entropie abgeführt. Da

die Zeitskala des Kollaps in der Größenordnung von Millisekunden liegt, Starke Prozesse aber eine Zeitskala von  $10^{-20}$  s haben, werden Störungen sofort beseitigt, weil der Kollaps im Vergleich zu der Zeitskala starker Prozesse “ewig” dauert.

Bedingt durch die hohe Dichte und der damit einhergehenden Entartung der Elektronen tritt vermehrt Elektroneneinfang ein. Es entstehen dabei Neutrinos, die bei ihrer Emission Energie und Entropie abführen. Der Gesamteinfluß auf die Entropie ist unsicher.

Die verminderte Elektronenzahl reduziert weiter den Druck und beschleunigt so den Kollaps. Da das Verhältnis der Anzahl von Elektronen zu Baryonen kleiner wird, wird auch die Chandrasekhar-Grenze kleiner, welche ja von diesem Verhältnis abhängt.

### Neutrinoopazität

Bei einer Dichte von  $4 \cdot 10^{11} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  tritt ein Effekt auf, der sonst nur unmittelbar nach dem Urknall zu beobachten gewesen wäre: Die Sternmaterie wird für Neutrinos undurchsichtig. Die mittlere Weglänge  $\bar{\lambda}$  eines 30 MeV-Neutrinos beträgt im Core etwa 300 cm. Die Diffusionszeit (Zeit, die ein Teilchen braucht, um das Core zu verlassen) eines solchen Neutrinos beträgt damit etwa 1 s (nach [Raf96]). Die Neutrinos können das Core nicht verlassen und es nicht kühlen. Hier ändert sich auch die Rolle der Chandrasekhar-Grenze. Vorher war das die größte Masse, die ein entartetes Elektronengas am Einsturz hindern kann. Jetzt ist das die Grenzmasse, die als Ganzes kollabieren kann. Gebiete innerhalb dieses Teils des Cores können durch Schall- und Druckwellen erreicht werden und somit Dichteschwankungen ausgleichen.

### Aufbau einer Schockfront

Der Einsturz des Cores geht weiter. Irgendwann hat die Materie im Zentrum Kerndichte und darüber ( $\rho_{\text{Kern}} 2.7 \cdot 10^{14} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ) erreicht, weil von oben immer neues Material einfällt. Kernmaterie ist zwar schwer komprimierbar, aber es ist möglich. Die inneren Schichten stehen dadurch unter einer großen Spannung wie eine zusammengedrückte Feder. Die Implosionsfront kommt mit einer gewaltigen Erschütterung zum Stillstand und wird zu einer Explosionswelle, die durch die Entspannung des Cores ausgelöst wird. Die Geschwindigkeit, mit der eine Coreschale einstürzt, ist proportional zu ihrer Entfernung zum Sternzentrum. Man sagt deshalb, der Einsturz sei homolog. Die Dichte nimmt nach außen hin ab, die Schallgeschwindigkeit ebenfalls, da die Kompressibilität mit kleiner werdender Dichte zunimmt. Im Core gibt es eine Grenze, wo die Einfallgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit ist. Diese markiert die Grenze des homologen Cores und wird sonischer Punkt oder Schallpunkt genannt. Eine Störung innerhalb des homologen Cores hat keinen Einfluß auf Gebiete außerhalb dieses Punktes, denn eine Schallwelle, die am Schallpunkt durch die einfallende Materie nach außen läuft, bleibt in bezug auf das Sternzentrum in Ruhe,

da dieses Coreelement mit Schallgeschwindigkeit einstürzt. Demzufolge kann eine Störung im Inneren den Außenbereich nicht erreichen.

Wenn die Implosionsfront zum Stillstand gekommen ist, entstehen durch die Erschütterung Schallwellen, die nach außen laufen, mit größer werdender Entfernung zum Zentrum langsamer werden und am Schallpunkt schließlich stehen bleiben. Auf die Materie im Zentrum, die ja Kerndichte erreicht hat, fällt immer mehr Material und erzeugt weitere Schallwellen, die sich am Schallpunkt sammeln. Dort baut sich eine Druckfront auf. Diese bremst auffallende Materie, wodurch ein Sprung in der Schallgeschwindigkeit entsteht. Diese Unstetigkeit verursacht eine Schockwelle.

Nachdem das Core Kerndichte erreicht hat und durch weiteres einfallendes Material weiter komprimiert worden ist, entspannt sich das Core und sendet weitere Schallwellen aus, die sich mit der Schockfront am Schallpunkt vereinen.

### Schockwellen

An dieser Stelle soll der Unterschied zwischen einer Schall- und einer Schockwelle geklärt werden. Schallwellen durchlaufen ein Medium mit Schallgeschwindigkeit und verändern die Eigenschaften des Mediums nicht. Es wird vor allen Dingen nicht zerstört. Eine Schockwelle pflanzt sich mit Überschallgeschwindigkeit fort und ändert dabei Druck, Dichte, Entropie des durchlaufenen Mediums.

### Neutrिनोकühlung

Die bei der Supernova SN 1987A beobachteten Neutrinos wurden in einer Zeitspanne von etwa 10 s emittiert. Nach etwa einer Millisekunde werden die Neutrinos freigesetzt, die beim Elektroneneinfang entstehen. Dies ist der prompte Neutrिनोausbruch. Es bleiben aber noch genügend Leptonen (Neutrinos und Elektronen) im Inneren des Core gefangen, wo sich die Schockwelle gebildet hat. Der äußere Teil des Cores fällt in der nächsten Sekunde in sich zusammen. Seine Bindungsenergie wird in Form von Neutrinos emittiert. Mittlerweile konnte die Schockwelle weiter nach außen laufen und die äußeren Schichten des Sterns wegreißen. Das Core (Radius etwa 30 km) kann als Stern im Stern betrachtet werden. Er kontrahiert weiter und wird durch die Emission von Neutrinos aller Generationen gekühlt. Durch die Emission von Elektroneneutrinos gehen die Leptonen bis auf einen kleinen Rest verloren. Nach 5–10 s ist diese Phase abgeschlossen (sogenanntes Helmholtzkühlen, s. [Raf96]). Danach setzt die späte Kühlungsphase des Neutronensterns ein.

Der wesentliche Punkt ist die Dauer der Neutrिनोकühlung von  $\geq 10$  s, die im Vergleich zur Zeitdauer des Kollaps sehr lang ist. Die Neutrinos können aus dem Core nicht frei herausströmen, denn ihre mittlere Weglänge  $\lambda_\nu$  ist kleiner als der Coreradius. Sie müssen aus dem Core langsam herausdiffundieren. Dieses Neutrिनოსignal ist 1987 nachgewiesen



worden (IMB, Kamiokande). Ein zusätzlicher Kühlmechanismus darf deshalb nicht zu effektiv sein. Für die mittlere Weglänge gilt nämlich  $\lambda_\nu = 1/(n\sigma) \propto 1/(nT^2)$ , wobei  $n$  die Teilchendichte,  $\sigma$  den totalen Wirkungsquerschnitt und  $T$  die Temperatur bezeichnen. Wäre ein Kühlmechanismus effektiver, würde die Coretemperatur rasch sinken und die mittlere freie Weglänge der Neutrinos größer werden. Ein kürzeres Neutrinosignal wäre die Folge. Das steht aber im Widerspruch zu den Beobachtungen.

### Weitere Verlauf

Das Geschehen danach ist unklar. Im einfachsten Szenario läuft die Schockwelle durch alle Schichten des Sterns in Richtung Oberfläche: Der Stern explodiert, man kann eine Supernova beobachten. Der größte Teil der Hülle wird weggesprengt, übrig bleibt ein kleiner, extrem dichter Reststern, der zu einem Neutronenstern kondensiert. Die Schockwelle setzt auf ihrem Weg nach außen die gefangenen Neutrinos frei, die den Stern dabei kühlen.

Computersimulationen zeigen aber ein anderes Bild. Die Schockwelle läuft nach 100 – 200 km aus, weil sie auf ihrem Weg die Atomkerne in kleinere Bestandteile (z. B. Protonen) zerlegt und dabei an Energie verliert. Druck und Temperatur werden stark vermindert. Die Protonen fangen Elektronen ein, die dabei entstehenden Neutrinos entkommen und führen Energie ab. Wegen der vielen Zwischenfälle, die der Schockwelle in dieser Region passieren können, wird dieser Teil des Sterns “Minenfeld” genannt. Es gibt kein befriedigendes Modell, das die Explosion zutreffend beschreibt.

Das soeben beschriebene Szenario ist ein mögliches unter vielen. Simulationen haben gezeigt, daß der Mechanismus stark von der Masse und der Kompressibilität der Kernmaterie abhängt. Das letztgenannte Modell trifft wohl auf Sterne mit einer Anfangsmasse von  $12 - 18 M_\odot$  zu.

### Schicksal des Reststerns

Zum Schluß noch ein paar Bemerkungen zu dem Schicksal des Cores. Die Gravitation kann den Elektronendruck überwinden. Sogar Kernmaterie kann den weiteren Einsturz nicht immer verhindern. Die Grenzmasse für einen erkalteten Neutronenstern liegt bei etwa  $1.8 M_\odot$ . Die Argumente sind dieselben wie bei der Chandrasekhar-Grenze. Die nicht-relativistisch entarteten Neutronen können den weiteren Kollaps bis zu dieser Grenze verhindern. Größere Massen kollabieren wahrscheinlich zu einem Schwarzen Loch. Unmittelbar nach der Explosion ist der Reststern in seinem Inneren etwa  $10^{11}$  K heiß. Diese Temperatur reicht aus, um größere Massen als die  $1.8 M_\odot$  zu stabilisieren. Die Kühlung erfolgt durch Neutrinos. Diese führen hundert Mal mehr Energie als die Explosion ab, in Zahlen  $\approx 10^{53}$  erg, was etwa einem Zehntel der Gesamtmasse des Sterns entspricht.

Auf der Erde können diese Modelle durch Nachweis der Neutrinos und der Häufigkeit der chemischen Elemente überprüft werden.

# Kapitel 3

## Neutralinokühlung der Supernova

### 3.1 Die Emissivität des Elektron-Positron-Kanals

In diesem Kapitel werden die Produktionsraten für Neutralinos durch die verschiedenen Mechanismen berechnet.

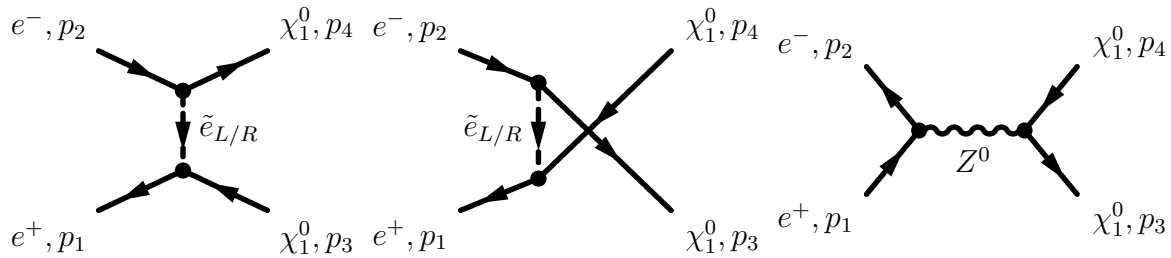
#### 3.1.1 $e^+e^-$ -Annihilation und Selektронаustausch

Wir nehmen an, daß folgende  $e^+e^-$ -Prozesse zur Kühlung der Supernova beitragen können:

$$e^+e^- \longrightarrow Z^0 \longrightarrow \chi_1^0\chi_1^0 \quad (3.1)$$

$$e^+e^- \xrightarrow{\tilde{e}_{L/R}} \chi_1^0\chi_1^0 \quad (3.2)$$

Der erste Prozeß ist nur dann möglich, wenn zum leichtesten Neutralino Higgsino-Anteile beigemischt sind, weil nur die Higgsinos an das  $Z^0$  koppeln. Die Feynman-Graphen für diese fünf Prozesse sind in erster Ordnung:



Mit den Feynmanregeln des Standardmodells (ich beziehe mich auf [HM84]) und des MSSM aus [HK85] und [GH86] kann man den totalen Wirkungsquerschnitt berechnen. Bartl et al. haben in [BFM86] diesen Wirkungsquerschnitt in allgemeinerer Form für zwei verschiedene Neutralinos als Endzustand berechnet. Da die anderen Neutralinos zu große Massen haben als daß sie thermisch angeregt werden können, beschränke ich mich auf den Sonderfall, daß zwei leichteste Neutralinos auslaufen. Für die ausführliche Rechnung verweise ich auf den Anhang, hier nenne ich nur die wesentlichen Ergebnisse.

Es ergeben sich folgende Amplituden:

$$-iM_1 = \frac{g^2}{\cos^2 \theta_W} D_{Z^0}(s) \bar{v}(p_1) \gamma^\mu (c_L P_L + c_R P_R) u(p_2) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu (L_1 P_L + R_1 P_R) v(p_4) \quad (3.3)$$

$$-iM_2 = -g^2 |l_1|^2 D_{\tilde{e}}(t) \bar{v}(p_1) P_R v(p_3) \bar{u}(p_4) P_L u(p_1) \quad (3.4)$$

$$-iM_3 = -g^2 |l_1|^2 D_{\tilde{e}}(u) \bar{v}(p_1) P_R v(p_4) \bar{u}(p_3) P_L u(p_2) \cdot (-1) \quad (3.5)$$

$$-iM_4 = -g^2 |r_1|^2 D_{\tilde{e}}(t) \bar{v}(p_1) P_L v(p_3) \bar{u}(p_4) P_R u(p_2) \quad (3.6)$$

$$-iM_5 = -g^2 |r_1|^2 D_{\tilde{e}}(u) \bar{v}(p_1) P_L v(p_4) \bar{u}(p_3) P_R u(p_2) \cdot (-1) \quad (3.7)$$

Summation über die Ausgangsspins und Mittelung über die Eingangsspins liefert den differentiellen Wirkungsquerschnitt, ausgewertet im Schwerpunktssystem:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{g^4}{128\pi^2 s} \sqrt{1 - \frac{4M^2}{s}} \left( (t - M^2)^2 + (u - M^2)^2 - 2M^2 s \right) \times \quad (3.8)$$

$$\left[ \frac{c_L^2 L_1^2 + c_R^2 L_1^2}{M_{Z^0}^4 \cos^4 \theta_W} + \frac{L_1 (c_L |l_1|^2 - c_R |r_1|^2)}{M_{Z^0}^2 M_{\tilde{e}}^2 \cos^2 \theta_W} + \frac{|l_1|^4 + |r_1|^4}{4M_{\tilde{e}}^4} \right], \quad (3.9)$$

die auftretenden Konstanten bedeuten:

$$c_L = \frac{1}{2}(c_V + c_A); \quad c_R = \frac{1}{2}(c_V - c_A); \quad c_V = T_3 - 2e_\ell \sin^2 \theta_W; \quad c_A = T_3 \quad (3.10)$$

$$L_1 = \frac{1}{2} (N_{14} N_{14}^* - N_{13} N_{13}^*) \cos(2\beta) - \frac{1}{2} (N_{13} N_{14}^* - N_{14} N_{13}^*) \sin(2\beta) \quad (3.11)$$

$$R_1 = -L_1 \quad (3.12)$$

$$l_1 = \sqrt{2} \left[ e_\ell \sin \theta_W N_{11} + \frac{1}{\cos \theta_W} \left( \frac{1}{2} - e_e \sin^2 \theta_W \right) N_{12} \right] \quad (3.13)$$

$$r_1 = \sqrt{2} \left[ e_\ell \sin \theta_W N_{11}^* - e_\ell \frac{\sin^2 \theta_W}{\cos \theta_W} N_{12}^* \right] \quad (3.14)$$

$$D_{Z^0}(s) = \frac{i}{M_{Z^0}^2}; \quad D_{\tilde{e}}(x) = \frac{-i}{M_{\tilde{e}}^2} \quad (3.15)$$

Nach Integration über die Winkel erhält man den totalen Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \frac{2\pi\alpha^2 s}{3\sin^4\theta_W} \left[ \frac{c_L^2 L_1^2 + c_R^2 L_1^2}{M_{Z^0}^4 \cos^4\theta_W} + \frac{L_1(c_L|l_1|^2 - c_R|r_1|^2)}{M_{Z^0}^2 M_\epsilon^2 \cos^2\theta_W} + \frac{|l_1|^4 + |r_1|^4}{4M_\epsilon^2} \right] \left( \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \right)^{3/2} \quad (3.16)$$

Weitere Details und Erklärungen zu dieser Rechnung befinden sich im Anhang.

### 3.1.2 Definition der Emissivität

Die Emissivität  $\epsilon$  gibt den Energieverlust pro Zeit und Volumen an. Sie kann analog zum Wirkungsquerschnitt aus dem Betragsquadrat des Matrixelements unter Verwendung Fermis Goldener Regel berechnet werden. Sie ist für einen  $2 \rightarrow 2$ -Prozeß gegeben durch:

$$\epsilon = (2\pi)^4 \int \frac{dp_1^4}{(2\pi)^2 2E_1} \frac{dp_2^4}{(2\pi)^2 2E_2} \frac{dp_3^4}{(2\pi)^2 2E_3} \frac{dp_4^4}{(2\pi)^2 2E_4} (E_3 + E_4) f_1 f_2 (1 - f_3)(1 - f_4) \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |\overline{\mathcal{M}}|^2 \quad (3.17)$$

$$f_i = \frac{1}{e^{(p_i \pm \mu_i)/T} + 1} \quad (\text{alle (Anti-)Teilchen sind Fermionen}). \quad (3.18)$$

Aus der Formel ist der Zusammenhang zwischen Emissivität und Wirkungsquerschnitt ersichtlich:

$$\epsilon = \frac{1}{(2\pi)^6} \int dp_3 dp_4 (E_3 + E_4) f_1 f_2 (1 - f_3)(1 - f_4) v_{\text{Møll}} \sigma \quad (3.19)$$

An dieser Stelle sei noch darauf hingewiesen, daß die beiden einlaufenden Teilchen im Sternsystem nicht kollinear sind. Deswegen muß für  $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$  die Møller-Geschwindigkeit angesetzt werden (siehe [LL71]), die als Funktion der Teilchengeschwindigkeiten folgende Form hat:

$$v_{\text{Møll}} = \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2} \quad (3.20)$$

Um die Emissivität ausrechnen zu können, muß man die Temperatur und das chemische Potential kennen. Wenn die Temperaturen hoch und damit die Entartung niedrig ist, so sind  $f_3$  und  $f_4$  Null. Die Faktoren  $1 - f_3$ ,  $1 - f_4$  geben die Phasenraumunterdrückung an, da Fermionen nur einen freien Zustand pro Teilchen besetzen dürfen.  $f_1$  und  $f_2$  geben die Teilchendichte an.

### 3.1.3 Emissivität des Elektron-Positron-Prozesses

Der totale Wirkungsquerschnitt des Prozesses  $e^+e^- \rightarrow \chi^0\chi^0$  wurde schon ausgerechnet. Das Ergebnis kann jetzt für die Berechnung der Emissivität verwendet werden. Die Impulse der einlaufenden Teilchen (Elektron und Positron) werden wie folgt parametrisiert:

$$p_1^\mu = (p_1, 0, 0, p_1), \quad p_2^\mu = (p_2, 0, p_2 \sin \theta, p_2 \cos \theta) \quad (3.21)$$

$$\theta = \angle(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \quad (3.22)$$

Einige Winkelintegrationen in Formel (3.19) können schon ausgeführt werden. Man erhält als Resultat, wenn man  $E_{1,2} = p_{1,2}$  (masselose Elektronen bzw. Positronen) und  $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$  (Energieerhaltung) benutzt (siehe [Kac00]):

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi^4} \int dp_1 dp_2 d\cos \theta \frac{p_1^2}{e^{(p_1-\mu)/T} + 1} \frac{p_2^2}{e^{(p_2+\mu)/T} + 1} (p_1 + p_2) v_{\text{Møll}} \sigma \quad . \quad (3.23)$$

Unter Verwendung von Gl.(3.21) und  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/E$  erhält man für die Möller-Geschwindigkeit:

$$v_{\text{Møll}} = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_{\text{Møll}} = \left| \frac{\mathbf{p}_1}{E_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{E_2} \right| = \left| \frac{\mathbf{p}_1}{p^0} - \frac{\mathbf{p}_2}{p^0} \right| = (1 - \cos \theta) \quad . \quad (3.24)$$

### 3.1.4 Die abgestrahlte Gesamtenergie

Integration der Emissivität über das Sternvolumen und die Abstrahldauer liefert die Leistung beziehungsweise die Energie dieses Prozesses:

$$E = \int_{\Delta t} dt \int_{\Delta V} dV \epsilon(M_\chi, \rho, T, \eta); \quad (3.25)$$

$$\Delta t : \text{Abstrahldauer} \quad \Delta V : \text{Sternvolumen} \quad (3.26)$$

Weil in [BL86] Temperatur und Entartung (siehe die entsprechenden Abb. aus [BL86]) nicht in Abhängigkeit des Radius, sondern der eingeschlossenen Baryonenmasse angegeben sind, muß  $dV$  auf  $dm$  umgerechnet werden. Das Dichteprofil aus [BL86] zeigt, daß die Dichte des kollabierenden Cores nach 250 ms etwa konstant ist. Damit ist die Umrechnung einfach:  $dV = d\frac{m}{\rho} = \frac{dm}{\rho}$ . Für die Abstrahldauer nehme ich Zeitspannen zwischen 0.005 s und 2 s an, weil die Zeitspannen, in denen der Kollaps stattfindet, diesen Größenordnungen entspricht. Für die anderen Parameter fixiere ich sie bei 1 s.

### 3.1.5 Temperatur und chemisches Potential

Ein Ziel meiner Arbeit ist es, für die Temperatur und das chemische Potential eine realistische Verteilung anzunehmen. Burrows und Lattimer haben in [BL86] verschiedene Parameter einer Supernova untersucht, unter anderem haben sie Profile für die Temperatur, chemische Potential und Dichte zu verschiedenen Zeiten berechnet. Diese Profile verwende ich, um die Emissivität in Abhängigkeit des Sternradius zu berechnen. Ich benutze die Profile zur Zeit  $t = 0.5\text{ s}$ , weil diese in der Mitte der ersten Sekunde liegen. Aus den Funktionsgraphen werden etwa ein halbes Dutzend charakteristische Punkte (z. B. Extrema) abgelesen, und diese dann durch kubische Splines miteinander verbunden. Um ein gutes glattes Resultat zu erzielen, reichen die wenigen Punkte aus. Ein Problem bei diesen Simulationen ist die Unkenntnis der Anfangsdaten. Die Simulation von Burrows und Lattimer beginnt mit dem Kollaps des Sterns. Die Simulationen können aber noch nicht den Prozeß des Kollabierens erfolgreich berechnen. Die Schockwelle bleibt im Core stecken. Deshalb sind die Anfangsdaten nur unzureichend bekannt. Nach einer gewissen Zeit ( $\mathcal{O}(1)\text{ s}$ ) steht das Supernovasystem aber im Diffusionsgleichgewicht, so daß die genaue Kenntnis der Anfangsdaten für die weitere Entwicklung nicht nötig ist. Man erkennt aus den Graphen, daß bei  $r \approx M_\odot$  die Temperatur hoch und die Entartung gering ist. Die numerische Auswertung der Emissivität zeigt, daß die meiste Energie aus einer Kugelschale mit diesem Radius herrührt.

Der Radius ist als eingeschlossene Baryonenmasse angegeben. Über die Coredichte kann dann die Massenabhängigkeit in eine Radiusabhängigkeit umgewandelt werden. Aus der Größe des Sterns  $R = 13\text{ km}$  und seiner Masse  $M = 1.4 M_\odot$  ergibt sich  $\rho$  zu

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \approx 3 \cdot 10^{14} \text{ g cm}^3 \quad ; \quad (3.27)$$

das Core hat also Kerndichte erreicht.

Alle zur Berechnung der Emissivität notwendigen Größen sind jetzt beisammen. Die drei verbleibenden Integrationen in Gl. (3.23) werden numerisch ausgeführt. Dazu verwende ich die verallgemeinerte Gaußsche Integrationsmethode, bei der der Integrand  $f(x)$  an den Nullstellen orthogonaler Polynome ausgewertet wird und diese Werte gewichtet addiert werden. Die zu verwendenden Polynome hängen von der Gestalt des Integranden ab:

$$\int_a^b k(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i), \quad (3.28)$$

$$k(x) : \quad \text{nichtnegative, meßbare Gewichtsfunktion,} \quad (3.29)$$

$$c_i : \quad \text{Gewichtsfaktoren} \quad . \quad (3.30)$$

Die Intervallgrenzen können auch uneigentlich sein. Die  $x_i$  sind Nullstellen von Polynomen, diese Polynome bilden bezüglich des Skalarprodukts

$$(f, g) = \int_a^b k(x) f(x) g(x) dx \quad (3.31)$$

eine Orthonormalbasis. Die genaue Theorie dazu findet man z. B. in [Sto94].

Für dieses Problem geeignete Polynome sind für die Impulsintegrationen die Laguerre-Polynome, da die Fermi-Dirac-Verteilungen sich wie  $\mathcal{O}(e^{-x})$  verhalten, für die Winkelintegration wähle ich die Legendre-Polynome. Die Nullstellen  $x_i$  und Gewichtungsfaktoren  $c_i$  findet man in [SS66] oder in [AS70] tabelliert. Dieses Verfahren hat den Vorteil, daß man mit wenigen Schritten (und damit in kürzerer Zeit gegenüber Keplerscher Faßregel oder ähnlichem) ein genaues Endergebnis erhält, nämlich die Emissivität in Abhängigkeit von der Masse und der Kopplung, das heißt, den Mischungsparametern und der Squarkmasse.

### 3.1.6 Das Resultat

In Abbildung 3.1 ist die Leistung in Abhängigkeit der Neutralinomasse exemplarisch für ein Bino mit einer Seletronmasse von 100 GeV dargestellt.

Zur besseren Handhabung der Funktion habe ich sie durch eine geeignete analytische Funktion approximiert. Folgender Ausdruck ist eine mögliche Näherung:

$$P(M_\chi) = 6.47 \cdot 10^5 \left( \frac{M_\chi}{\text{MeV}} \right)^{0.03} \exp \left( -0.0115 \frac{M_\chi}{\text{MeV}} - 0.000053 \left( \frac{M_\chi}{\text{MeV}} \right)^2 \right) 10^{51} \text{ erg/s} \quad (3.32)$$

Die Näherung ist als gestrichelte Funktion ebenfalls in Abb. 3.1 zu sehen. Diese Näherungsformel hat bis  $M_\chi = 370 \text{ MeV}$  einen maximalen Fehler von 20%, darüber hinaus ist der Fehler so groß, daß die Formel nicht mehr brauchbar ist.

### 3.1.7 Frühere Resultate

Ellis et al. haben in [EOSS88] die Möglichkeit von Photinos mit einer Masse von etwa 100 eV diskutiert. Squark- und Seletronmassen in Bereich der  $W$ -Masse zerstören eventuell den durch Neutrinoobservationen erlaubten Bereich. Neutralinos sind dann genauso wie Neutrinos gefangen, während Sfermionmassen von 2.5 TeV die Photinos frei herausströmen lassen.



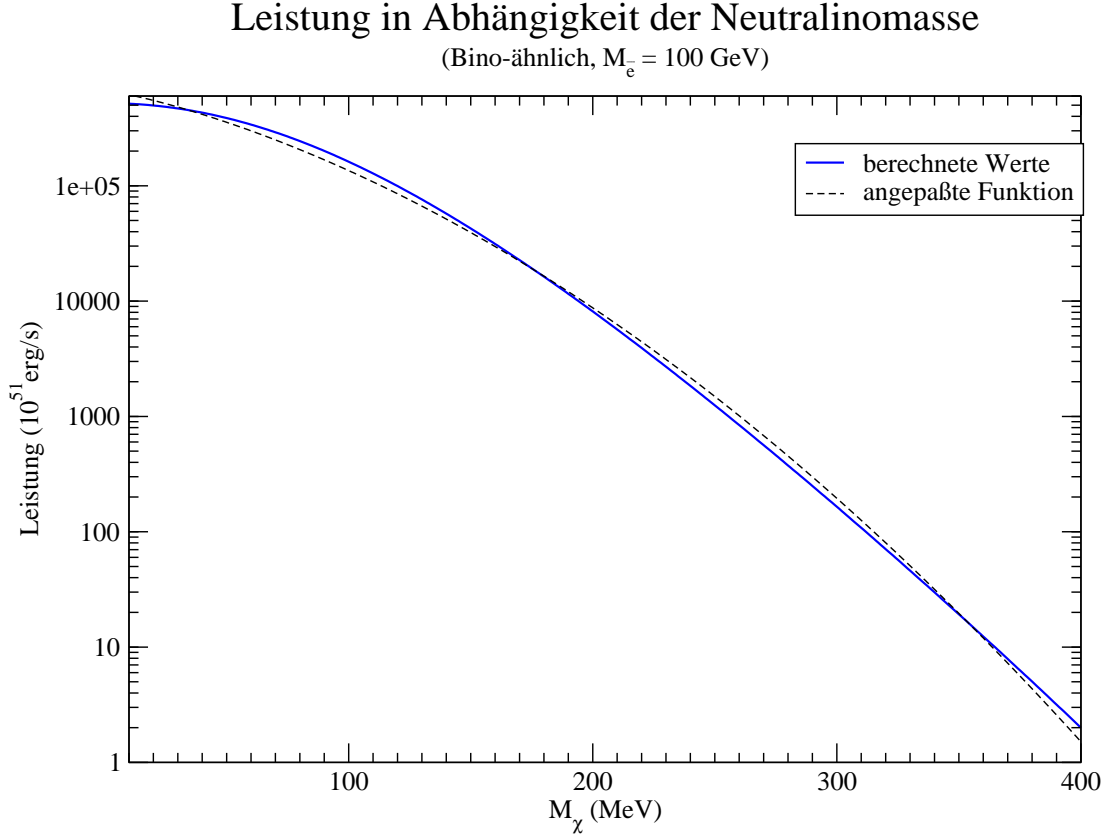


Abbildung 3.1: Leistung in Abhängigkeit von der Masse für ein Bino-Neutralino,  $M_{\tilde{e}} = 100 \text{ GeV}$

Kachelrieß hat in [Kac00] die Möglichkeit eines 34 MeV-Neutralinos untersucht und gefunden, daß die relative Emissivität (Emissivität normiert auf die zentrale Emissivität) nur schwach unterdrückt ist.

Dicus et al. haben in [DMT98] eine unter Massenschranke für ein superleichtes Gravitino mittels Supernova-Kühlung ausgerechnet. Sie haben als maximale Leistung  $10^{52} \text{ erg/s}$  angenommen und damit die Gravitino-Emission nach oben begrenzt.

### 3.1.8 Diskussion der Parameter

#### Abschätzung der abgestrahlten Energie

Um eine untere Schranke für die Neutralinos zu gewinnen, braucht man eine obere Schranke für die maximal zulässige abführbare Energie, ohne daß das Neutrinosignal gestört wird.

Einfache Überlegungen führen zu folgender Formel für die Bindungsenergie, die beim Einsturz einer kugelsymmetrischen Massenverteilung frei wird (aus [Raf96]):

$$E_b = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{r} = 1.6 \cdot 10^{53} \text{ erg} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left( \frac{10 \text{ km}}{r} \right) . \quad (3.33)$$

Nimmt man einen Endradius des Cores von 13 km wie Burrows und Lattimer in [BL86] an, so erhält man als freiwerdende Bindungsenergie  $3 \cdot 10^{53}$  erg. Diese Energie wird in Form von Photonen und Neutrinos abgegeben. Obwohl eine Supernova eine ganze Galaxie überstrahlen kann, ist die abgestrahlte Energie in Form von Photonen gegenüber den Neutrinos vernachlässigbar. Es werden etwa  $2.4 - 3.0 \cdot 10^{53}$  erg als Neutrinos abgestrahlt, das entspricht etwa 50000 Erdmassen oder 0.15 Sonnenmassen ([Bur90])! Da es sechs Neutrinoarten gibt, führt jede im Mittel  $4 - 5 \cdot 10^{52}$  erg ab. Damit kann ich die maximale Energie, die die Neutralinos abführen können, zu  $E = 10^{52}$  erg mit einer Unsicherheit von der Größenordnung  $\mathcal{O}(1)$  festlegen. In Abb. 3.2 wird die Abhängigkeit der unteren Massenschranke von der erlaubten abgestrahlten Energie für verschiedene Selektrenmassen dargestellt.

Für größere Energieschranken fällt die untere Massenschranke für das Neutralino bei konstanter Selektrenmasse schwach monoton, wie man das auch erwartet. Die Selektrenmasse hat einen erheblichen Einfluß. So liegt die untere Massengrenze bei einem leichten Selektren (100 GeV) bei 350...400 MeV, bei einem schweren Selektren (1000 GeV) ist das Neutralino leichter: 100...200 MeV.

### Die Zeitskala

Weiterhin muß man abschätzen, in welcher Zeit die Energie abgeführt wird. Der Kollaps findet auf einer Zeitskala von Bruchteilen einer Sekunde bis eine Sekunde statt. Innerhalb einer Sekunde werden  $10^{52}$  erg abgeführt, damit hätte ein Bino (siehe Abb. 3.1) eine untere Massenschranke von etwa 360 MeV. Vergrößert man die Abstrahlzeit (die maximal abgestrahlte Energie wird konstant bei  $10^{52}$  erg gehalten) für verschiedene Selektrenmassen, so wird die untere Massenschranke für das Bino kleiner, wie man aus Abb. 3.3 ablesen kann. Bei einem Selektren mit einer Masse von 1 TeV ist hier keine Aussage möglich. Für sehr kleine Zeiten hängt die Massenschranke empfindlich von der gewählten Abstrahlzeit ab, weil in diesem Bereich die Kurven steil verlaufen.

### Die Mischungsparameter

Betrachtet man die Abhängigkeit von den Mischungsparametern, so muß man im  $M - M' - \mu - \tan \beta$ -Parameterraum nach Gebieten suchen, die folgende Bedingungen erfüllen:

### Abhängigkeit der Massenschranke von der Energieschranke

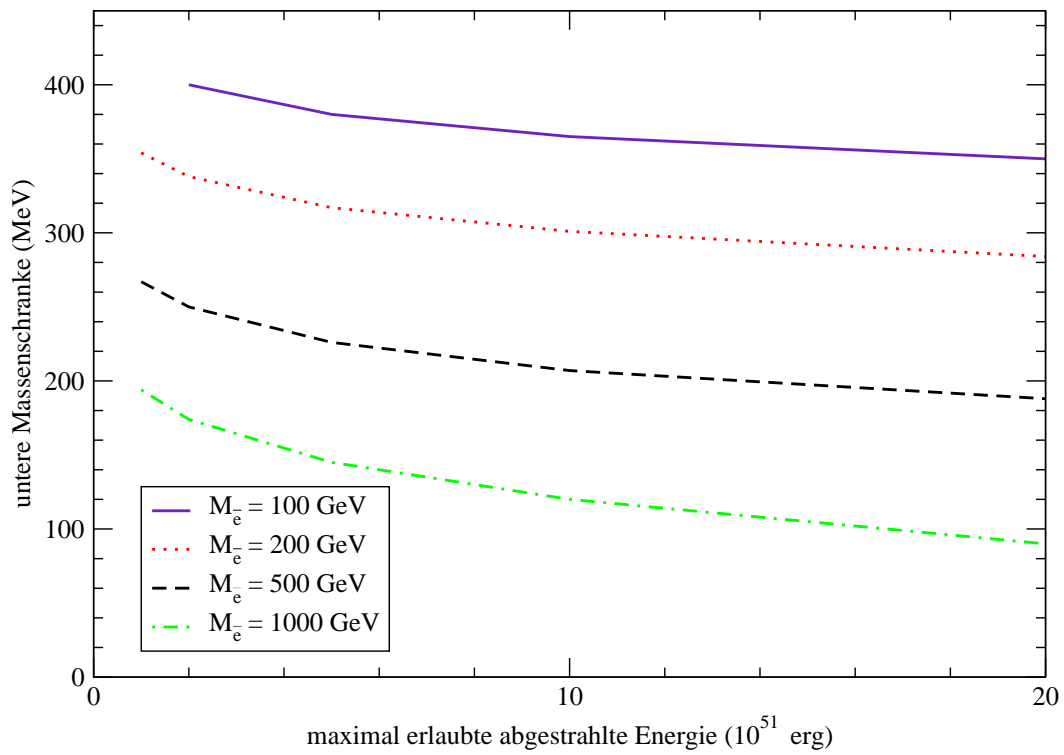


Abbildung 3.2: Abhängigkeit der Massenschranke von der maximal zulässigen abgestrahlten Energie

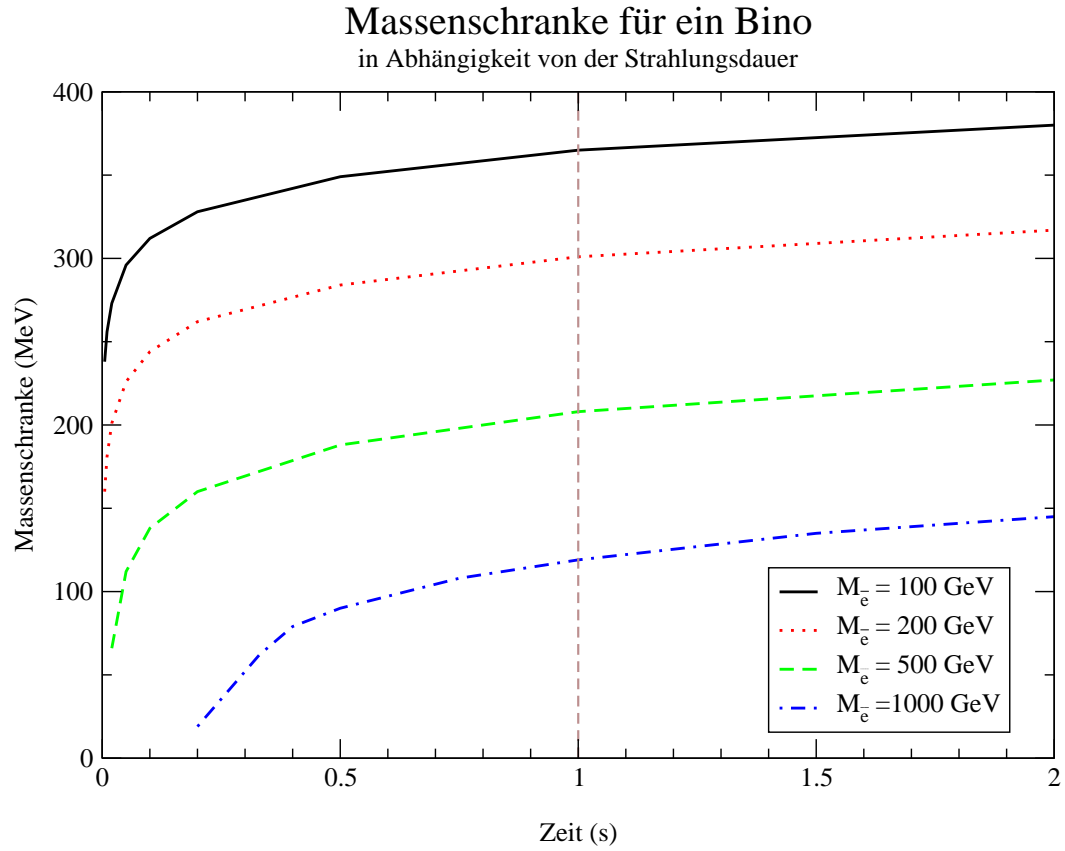


Abbildung 3.3: Abhängigkeit der Massenschranke von der Dauer der Energieabstrahlung

- $10 \text{ MeV} \leq M_{\chi^0} \leq 400 \text{ MeV}$
- $M_{\chi^\pm} \geq 120 \text{ GeV}$  (siehe einführendes Kapitel)
- $\sqrt{N_{13}^2 + N_{14}^2} < 0.5 = (0.08)^{1/4}$   
Diese Bedingung folgt aus dem Fehler der unsichtbaren Zerfallsbreite des  $Z^0$ -Bosons, siehe [CDRS00]

Eine ähnliche Suche im Parameterraum wurde in [CDRS00] durchgeführt, allerdings mit einer engeren Massenbreite und einer höheren Charginomasse. Für  $\mu \leq 0 \text{ GeV}$  gibt es keinen zulässigen Eigenwert im Parameterraum. Den Parameter  $M_2$  muß man in sehr kleinen Schritten erhöhen, um das enge Tal zulässiger Werte nicht zu verfehlen. Da der kleinste Eigenwert von Interesse ist und “kleinster Eigenwert” einer Matrix, die von einer Reihe von Parametern abhängt, nicht unbedingt eine differenzierbare Funktion ist, kann der zulässige Bereich etwas sprunghaft verlaufen, wie die Abb. 3.4 zeigt.

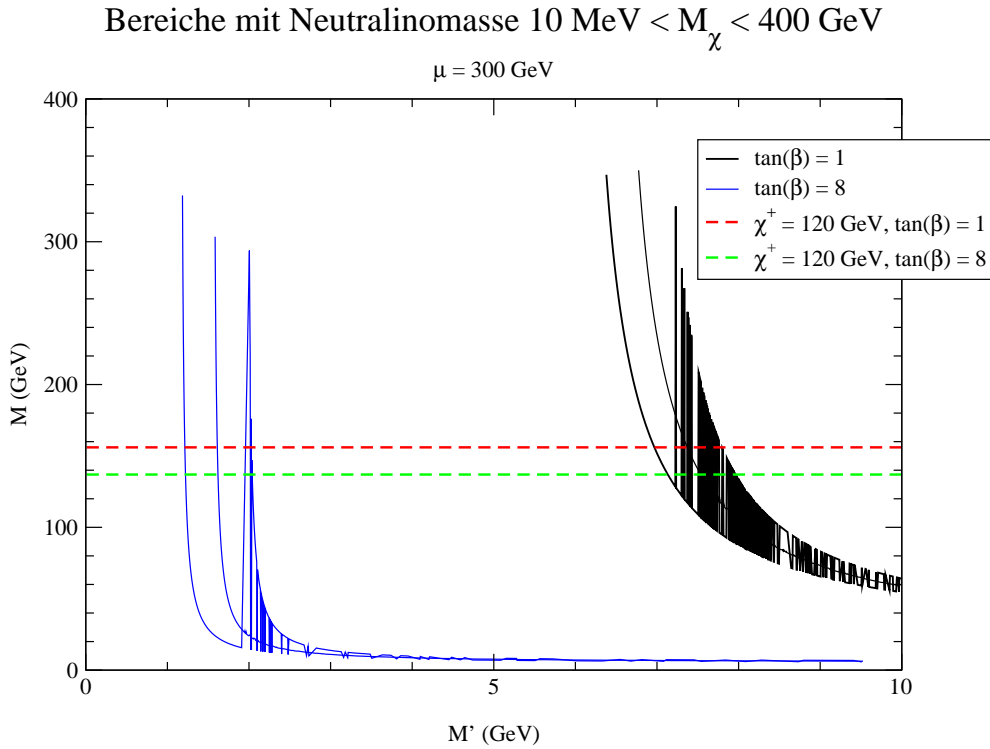


Abbildung 3.4: Bereiche mit Neutralino zwischen 10 und 400 MeV, oberhalb der gestrichelten Linie ist die Masse des Chargino größer als 120 GeV

Für eine Selekttronmasse in der Nähe der  $Z^0$ -Masse ändert sich die Gesamtkopplung bei einer Variation der Mischungsparameter wenig, das heißt, man kann von der Massenschranke nicht auf mögliche Mischungsparameter schließen. In diesem Szenario ist der  $Z^0$ -Beitrag äußerst klein. Das ändert sich, wenn die Selekttronmasse hoch wird. Dann wird der Selekttronanteil klein gegenüber dem  $Z^0$ -Anteil. Für zwei weitere mögliche Neutralinomischungen sind auf den folgenden Abbildungen die Massenschranken dargestellt. Die Energieschranke be

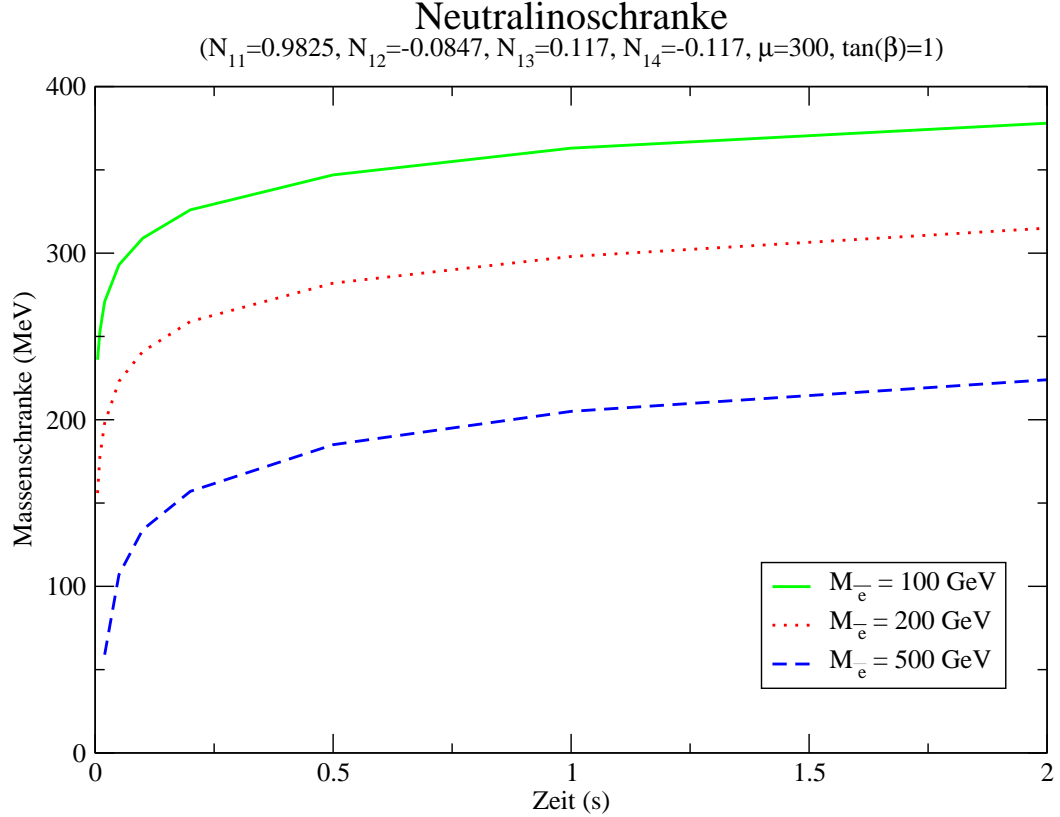


Abbildung 3.5: Szenario 1

Der Einfluß der Mischungsparameter  $N_{13}$  und  $N_{14}$  ist bei hohen Selekttronmassen deutlich zu erkennen. Bei Szenario 1 sind die letztgenannten Parameter gleich groß:  $N_{13} = N_{14} = 0.117$ ,  $\sqrt{N_{13}^2 + N_{14}^2} = 0.165$ , im zweiten Fall ist  $N_{13} = 0.221, N_{14} = 0.027$ ,  $\sqrt{N_{13}^2 + N_{14}^2} = 0.223$  (Dies ist der größte Wert, den ich für  $\sqrt{N_{13}^2 + N_{14}^2}$  gefunden habe.). Im ersten Fall tritt partiell Auslöschung der Parameter auf, im zweiten Fall dagegen nicht. Außerdem spielt ein weiterer Effekt eine Rolle. Die Kopplungskonstante ist eine Summe aus  $Z^0$ -, Selekttron- und Interferenzterm. Die  $Z^0$ -Masse ist bekannt, die

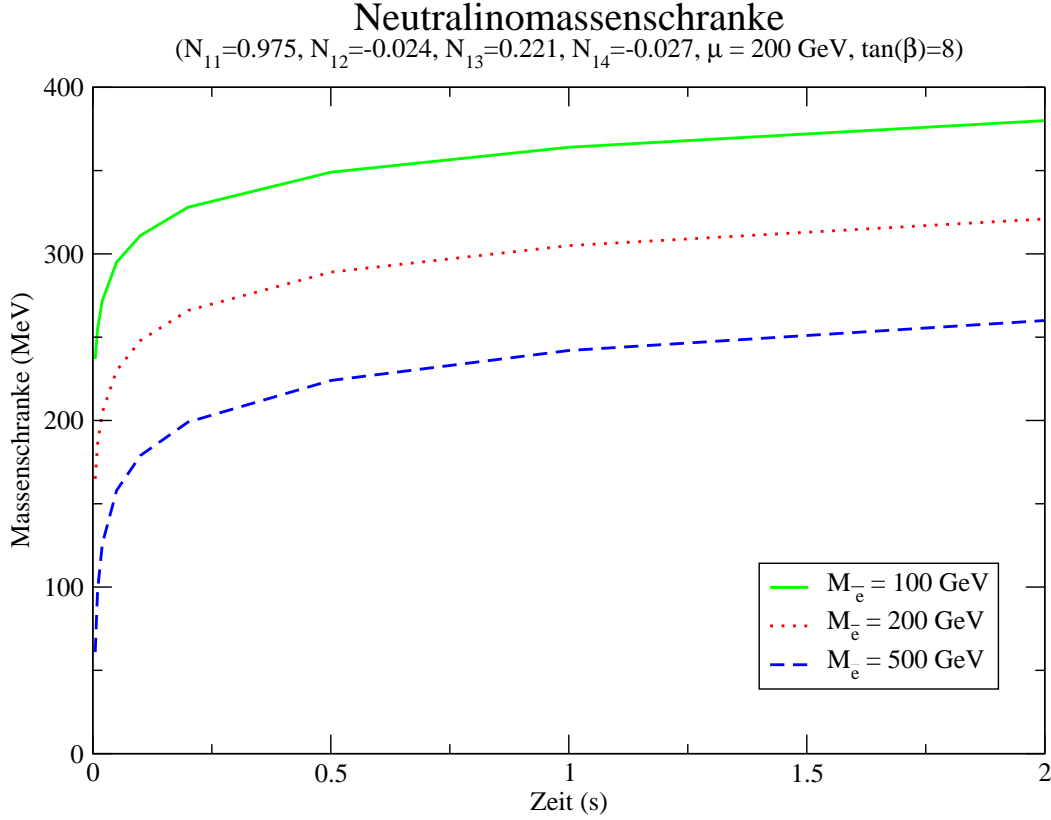


Abbildung 3.6: Szenario 2

Selektronmasse nicht. Bei hohen Selekttronmassen (TeV-Bereich) spielt der Selekttronterm gegenüber dem  $Z^0$ -Term keine Rolle mehr, da die Massen mit der inversen vierten Potenz eingehen, die Mischungsparameter jedoch nur quadratisch. Man erwartet also, daß die untere Massenschranke nicht mehr von der Selekttronmasse abhängt, wenn das Selekttron entsprechend schwer ist. Der Effekt der Mischungsparameter ist in den Abbildungen 3.5 und 3.6 bei einer Selekttronenmasse von 500 GeV deutlich zu erkennen, der andere dagegen nicht. Zwischen Szenario 1 (Abb. 3.5) und einem reinen Bino (Abb. 3.1, mit  $t = 1$  s) ist kein Unterschied zu erkennen, da der Effekt der Mischungsparameter sich herauskürzt.

### Selekttronenmasse

Bisher ist die Selekttronenmasse als dritter Freiheitsgrad bei den bisher diskutierten Parametern betrachtet worden. Nun werden diese fixiert (Energieschranke  $10^{52}$  erg, Bino) und die untere Massenschranke nur in Abhängigkeit der Selekttronenmasse diskutiert, siehe Abb.

3.7. Wie zu erwarten war, verkleinert sich die untere Massenschranke bei größer werdender Selekttronenmasse. Für noch größere Selekttronenmassen ist meine Rechnung vermutlich nicht mehr brauchbar. Die untere Massenschranke variiert zwischen 38 MeV ( $M_{\tilde{e}} = 1400$  GeV) und 365 MeV ( $M_z = 100$  GeV)

### Abhängigkeit der unteren Massenschranke von der Selekttronenmasse

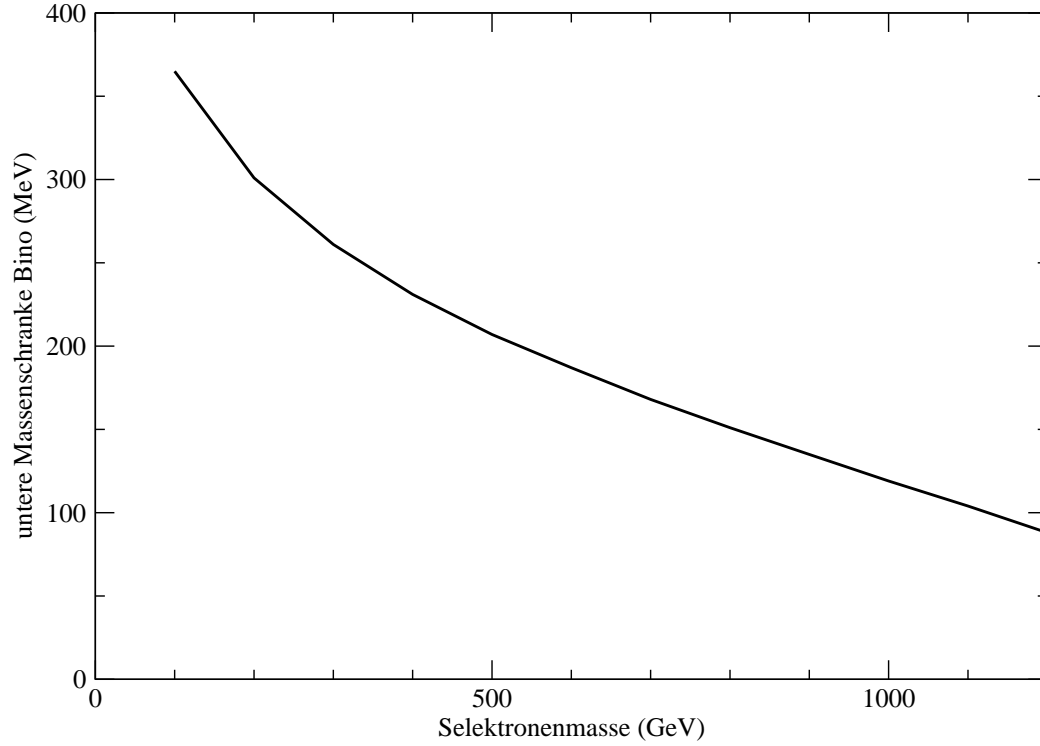


Abbildung 3.7: Abhängigkeit der unteren Massenschranke des Bino von der Selekttronenmasse



## 3.2 Die Nukleon-Nukleon-Bremsstrahlung

### 3.2.1 Die Mechanismen der Nukleon-Nukleon-Bremsstrahlung

Es gibt einen weiteren Mechanismus, der Neutralinos erzeugen kann: Nukleon-Nukleon-Bremsstrahlung. Um die möglichen Reaktionen zu erhalten, nimmt man die Diagramme der  $e^+e^-$ -Prozesse und baut sie in jedes Beinchen der Nukleon-Nukleon-Streuung ein (Natürlich ist Elektron durch Quark und Selektion durch Squark zu ersetzen.). Die abgestrahlte Energie in Form von Neutralinos wird als weich betrachtet, obwohl dies für hohe Massen nicht zutrifft. Aber für eine Größenordnungsabschätzung ist diese Methode trotzdem angemessen. Die Diagramme für die Kopplung der Neutralinos an die Quarks sind in Tabelle 3.1 aufgelistet. Später wird von den Quarks zu Nukleonen übergegangen.

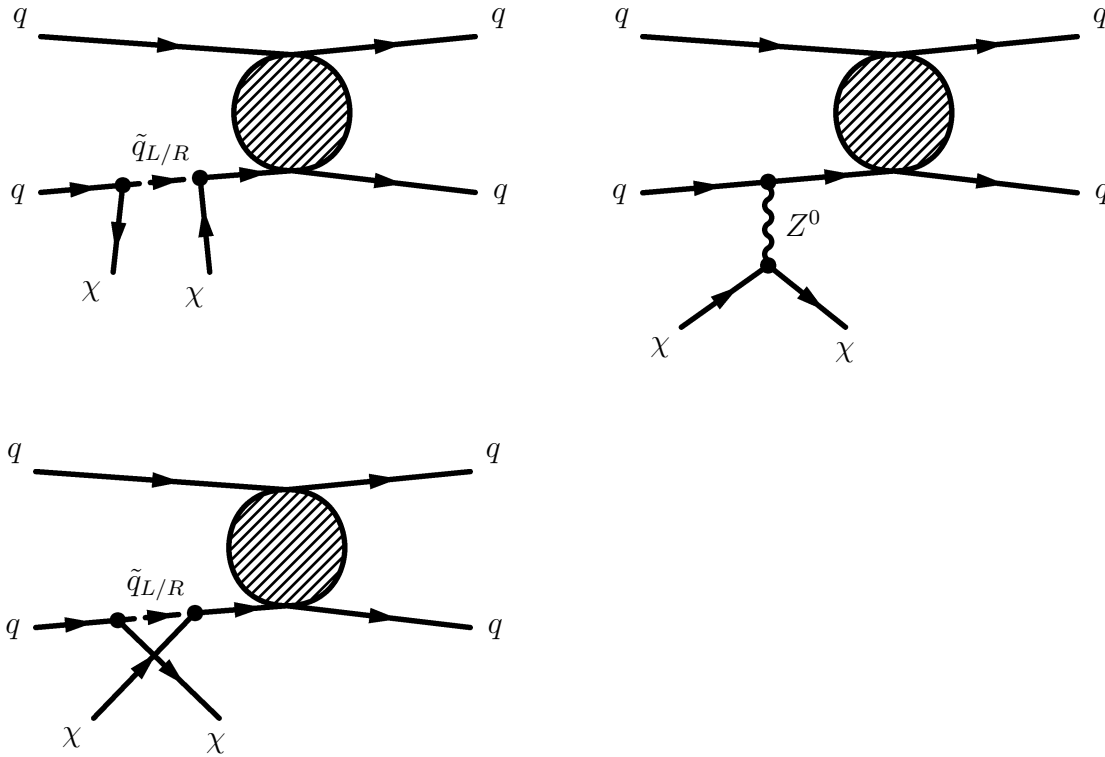


Tabelle 3.1: Nukleon-Nukleon-Bremsstrahlungsprozesse

Die Feynmanregeln sind im Anhang A zusammengestellt. Die Matrixelemente haben die Form  $P_R \otimes P_L$  bzw.  $P_L \otimes P_R$ , falls ein Squark ausgetauscht wird, und  $(c_L P_L +$

$c_R P_R) \otimes (L_1 P_L + R_1 P_R)$ , falls ein  $Z^0$ -Boson abgestrahlt wird. Weil die Sterntemperatur im Vergleich zur  $Z^0$ - und zur Squarkmasse klein ist (30 MeV gegenüber  $\approx 100$  GeV), werden die Impulse in den Propagatoren vernachlässigt. Dadurch entsteht eine effektive Vierpunktwechselwirkung. Anschließend werden die Ströme durch eine Fierztransformation umgeordnet, so daß hadronischer Strom und Neutralinostrom miteinander wechselwirken. Unter Verwendung der  $SU(6)$ -Wellenfunktionen werden die Quarks in die Neutronen eingebunden. Dann wird durch den Neutralen Strom normiert, um nichtperturbative Effekte der Starken Wechselwirkung zu berücksichtigen. Dieser Prozeß ist in Tab. 3.2 graphisch dargestellt. Die Neutralinos können an allen vier äußeren Beinen des Graphen abgestrahlt werden.

### 3.2.2 Der Neutralinotensor

#### Näherungen

Um die Bremsstrahlungsrate zu berechnen, nimmt man die Prozesse ohne Strahlung und fügt nacheinander an jedes Beinchen die Strahlung an. Die Nukleonen werden nichtrelativistisch behandelt, die Neutralinos dagegen relativistisch. Durch die nichtrelativistische Näherung für die Nukleonen vereinfachen sich die möglichen Kopplungsstrukturen, es gibt in diesem Fall nur zwei: den Einheitsoperator  $\mathbf{1}$  und den Spinoperator  $\boldsymbol{\sigma}$  (mehr dazu siehe Anhang B). Da die Kopplungen denen der Neutrinos sehr ähnlich sind und Neutrinobremssstrahlung in [HPR01] schon gerechnet wurde, die nukleonische Seite also schon bekannt gewesen ist, ist es notwendig, durch eine Fierztransformation Quark- und Neutralinostrom voneinander zu trennen. Friman und Maxwell haben in [FM79] für die Streuung einen Pion-Austausch zugrunde gelegt. C. Hanhart et al. beziehen dagegen die Produktionsrate weicher Strahlung (die Neutralinostrahlung wird ja näherungsweise als weich behandelt) auf die *on-shell*  $NN$ -Streuamplitude (s. [HPR01]). Dazu wird die Nukleon-Nukleon-Streu- $T$ -Matrix  $T_{NN}$  in Partialwellen zerlegt. Die Partialwellen können in Beziehung zu den Phasenverschiebungen aus den Nukleon-Nukleon-Streudaten gesetzt werden. In dem betrachteten Fall ist nur elastische Streuung kinematisch erlaubt.

Für die Berechnung des Neutralinotensors können die Ergebnisse aus dem letzten Abschnitt teilweise übernommen werden.

Durch die Fierztransformation zerfallen die Betragsquadrate der Matrixelemente in einen hadronischen Tensor und einen Neutralinotensor:  $\mathcal{M} = \mathcal{H}^{\mu\nu} \mathcal{N}_{\mu\nu}$ . Der Vektorstrom trägt in führender Ordnung nicht bei, weil  $\gamma^0 \rightarrow \mathbf{1}$  und  $\boldsymbol{\gamma} \rightarrow 0$  in nichtrelativistischer Näherung übergehen und der Kommutator mit dem Identitätsoperator verschwindet. Denn die Neutralinos können vor oder nach der Streuung der Neutronen abgestrahlt werden. In dem einen Fall ist die Energie des Zwischenzustandes positiv, im anderen Fall negativ. Die Summe beider Möglichkeiten ergibt den Kommutator zwischen der Streu- $T$ -

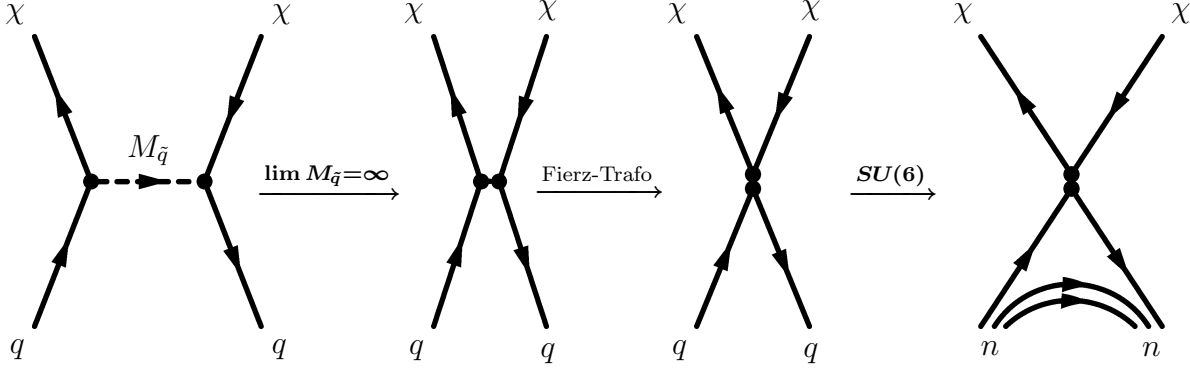


Tabelle 3.2: Wirkung der Transformationen

Matrix und dem Operator der Kopplungsstruktur. Der einzige Beitrag stammt von den räumlichen Komponenten des axialen Stroms. Demzufolge sind auch nur die räumlichen Komponenten des Neutralinotensors von Interesse. Da der hadronische Tensor von C. Hanhart et al. in [HPR01] schon berechnet worden ist, beschränke ich mich auf den Neutralinotensor.

### Von den Quarks zu Neutronen

Um aus der Kopplung der Quarks an die Neutralinos die Kopplung der Neutronen an letztere zu gewinnen, benutzen wir als einfachstes Modell die  $SU(6)$ -Wellenfunktionen (s. [Nac86]) und als Normierung den Neutralen Strom, so daß Renormierungseffekte der Starken Wechselwirkung berücksichtigt werden. Dies ist nur eine grobe Näherung und vernachlässigt die Dynamik der Quarks innerhalb des Nukleons. Da es sich hier um eine Größenordnungsabschätzung handelt, ist dieses Modell aber gerechtfertigt.

$$W_{nn\chi\chi} = (W_{nn\nu\bar{\nu}})_{NC} \frac{W_{q\bar{q}\chi\chi}^{SU(6)}}{(W_{q\bar{q}\nu\bar{\nu}})_{NC}^{SU(6)}} \quad . \quad (3.34)$$

	$T_3$	$Y$
$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{matrix}$
$u_R$	0	$\frac{2}{3}$
$d_R$	0	$-\frac{1}{3}$

Tabelle 3.3: Isospin und Hyperladung von up- und down-Quark

Der effektive Vertex der  $q\bar{q}\chi\chi$ -Kopplung sieht nun so aus:

$$W_{q\bar{q}\chi\chi} = \frac{e^2}{8M_{\tilde{q}}} \gamma_\mu \gamma_5 (l_1^2 \otimes \gamma^\mu P_L - r_1^2 \otimes \gamma^\mu P_R) \quad (3.35)$$

$$l_1^2 = \kappa(Y_L^2 + \Delta^2 + 2\tau_3 Y_L \Delta); \quad r_1^2 = \kappa^2 Y_R^2 \quad (3.36)$$

$$\kappa^2 = (N'_{j1} - N'_{j2} \tan \theta_W)^2; \quad \Delta = \cot \theta_W \left( \frac{\sin \theta_W N'_{j1} + \cos \theta_W N'_{j2}}{\cos \theta_W N'_{j1} - \sin \theta_W N'_{j2}} \right) \quad (3.37)$$

$$\tau : \quad 3\text{-Komponente des schwachen Isospins} \quad (3.38)$$

Der Erwartungswert der Hyperladung wird durch den schwachen Isospin und die Identität ausgedrückt:

$$T_3^L = \frac{1}{2}\tau_3; \quad T_3^R = 0; \quad Y_L = \frac{1}{6}\mathbf{1}, \quad Y_R = \frac{1}{2}\left(\tau_3 + \frac{1}{3}\right) \quad (3.39)$$

$$Y_R^2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{2}{3}\tau_3\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{3} + \tau_3\right) \quad (3.40)$$

$$l_1^2 = \kappa^2\left(\frac{1}{36} + \Delta^2 + \frac{1}{3}\tau_3\Delta\right) \quad (3.41)$$

$$r_1^2 = \kappa^2\left(\frac{5}{18} + \frac{1}{6}\tau_3\right) \quad (3.42)$$

Die  $SU(6)$ -Wellenfunktion des Neutrons ist gegeben durch

$$n(1/2, 1/2) \propto \frac{1}{\sqrt{18}} \left( 2(d^\dagger d^\dagger u^\downarrow + d^\dagger u^\downarrow d^\dagger + u^\downarrow d^\dagger d^\dagger) \right. \quad (3.43)$$

$$\left. - (d^\dagger d^\downarrow u^\uparrow + d^\downarrow d^\dagger u^\uparrow + d^\downarrow u^\uparrow d^\downarrow + d^\downarrow u^\uparrow d^\dagger + u^\uparrow d^\dagger d^\downarrow + u^\uparrow d^\downarrow d^\dagger) \right) \quad (3.44)$$

In nichtrelativistischer Näherung geht  $\gamma_\mu \gamma_5$  in Gl. (3.35) aus dem Quarkstrom in  $\sigma$  über (s. B). Gemäß dem Wigner-Eckart-Theorem braucht man nur den Fall  $\sigma_3$  auszuwerten:

$$\langle n | \sigma_3 | n \rangle = 1, \quad \langle n | \tau_3 \sigma_3 | n \rangle = -\frac{5}{3} \quad (3.45)$$

und dies in (3.36) einsetzen:

$$\begin{aligned} \langle n | \bar{q} \Gamma_{\chi\chi}^{(3)} q | n \rangle^{(SU(6))} &= \frac{e^2}{8M_{\tilde{q}}^2} \kappa^2 \left[ \left( \frac{1}{36} + \Delta^2 - \frac{5}{9} \Delta \right) \gamma^\mu P_L - \left( \frac{5}{18} - \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{3} \right) \gamma^\mu P_R \right] \\ &= \frac{e^2}{8M_{\tilde{q}}^2} \kappa^2 \left[ \left( \frac{1}{36} + \Delta^2 - \frac{5}{9} \Delta \right) \gamma^\mu P_L \right] \quad . \end{aligned} \quad (3.46)$$

Die Normierung berechnet man analog zu

$$\langle n | \bar{q} \Gamma_{NC}^{(3)} q | n \rangle^{(SU(6))} = \frac{5e^2}{24 \cos^2 \theta_W \sin^2 \theta_W M_{Z^0}^2} \gamma^\mu P_L \quad . \quad (3.47)$$

weil der Vertex die Struktur  $\tau_3 \sigma_3 \otimes \gamma^\mu P_L$  hat. Einsetzen der letzten Resultate in die Ausgangsgleichung (3.34) führt zu

$$W_{nn\chi\chi}^i = \frac{C_A G_F}{\sqrt{8}} \cdot \frac{1}{5} \kappa^2 \sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W \left( \frac{M_{Z^0}}{M_{\tilde{q}}} \right)^2 \left( \frac{1}{12} + 3\Delta^2 + \frac{5}{3} \Delta \right) \gamma^i P_L \quad . \quad (3.48)$$

Zur besseren Übersicht definiert man einen Faktor  $\beta$ , der die Kopplungskonstanten enthält:

$$\sqrt{\beta} = \frac{\sqrt{2}}{5} \kappa^2 \sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W \left( \frac{M_{Z^0}}{M_{\tilde{q}}} \right)^2 \left( \frac{1}{12} + 3\Delta^2 + \frac{5}{3} \Delta \right) \quad . \quad (3.49)$$

Bildung des Betragsquadrats und Kontraktion mit den Spinoren liefert

$$\mathcal{N}^{ij} = \frac{C_A^2 G_F^2}{8} \cdot \underbrace{\frac{2}{25} \kappa^4 \sin^4 \theta_W \cos^4 \theta_W \left( \frac{M_{Z^0}}{M_{\tilde{q}}} \right)^4 \left( \frac{1}{12} + 3\Delta^2 - \frac{5}{3} \Delta \right)^2}_{\beta} (\omega_1 \omega_2 + M^2) \delta^{ij} \quad (3.50)$$

wobei berücksichtigt worden ist, daß die linear auftretenden Impulse bei der Winkelintegration verschwinden, so daß nur die Energie- und die Massenterme beitragen. Die  $Z^0$ -Abstrahlung wird hier vernachlässigt.

### 3.2.3 Die Emissivität

Der Energieverlust in ein Phasenraumelement ist gegeben durch

$$dE = (\omega_1 + \omega_2) \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3 2\omega_1} \frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3 2\omega_2} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \quad (3.51)$$

$\omega_1, \omega_2$  : Energie der abgestrahlten Teilchen

$\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  : 3-Impulse der abgestrahlten Teilchen .



$$= \frac{1}{\omega} \langle [T_{NN}, \hat{O}] \rangle$$

Tabelle 3.4: Summe der Diagramme mit Strahlung vor und nach der Streuung

Wenn man die beiden Diagramme aus Tab. 3.4 aufsummiert, so erhält man  $\frac{1}{\omega} \langle [T_{NN}, \hat{O}] \rangle$ , da in dem einem Fall die Energie vorher, im anderen Fall nachher abgestrahlt wird. Daraus folgt, daß der Identitätsoperator, der ja aus dem Vektorstromanteil der Kopplung stammt, nicht beiträgt.

In Gl. (3.51) fügen wir  $1 = \int d\omega \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)$  und erhalten:

$$\frac{dE}{d\omega} = \left( \omega \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3 2\omega_1} \frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3 2\omega_2} \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) N_{ij} \right) H^{ij} \quad (3.52)$$

$$= \frac{\omega}{(2\pi)^4} d\omega_1 d\omega_2 \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) k_1 k_2 n(\omega_1, \omega_2) \frac{16}{\omega^2} H^{ij} \quad (3.53)$$

$$n(\omega_1, \omega_2) = \frac{G_F^2 C_A^2}{8} \beta (\omega_1 \omega_2 + M_\chi^2) \quad (3.54)$$

$$H_i^i = \sum_{M_s, M_{s'}} |\langle M_{s'} \mathbf{p}' | [S_i, T_{NN}] | M_s \mathbf{p} \rangle|^2 \quad (3.55)$$

$$S_i = \frac{\sigma_i^1 + \sigma_i^2}{2} \quad (3.56)$$

Austauschdiagramme sind mit einem Faktor 4 berücksichtigt. Die totale Emissivität eines  $2 \rightarrow 4$ -Prozesses hat die Form

$$\epsilon = \int d\omega \int \left( \prod_{i=1,2} \frac{d\mathbf{p}_i d\mathbf{p}'_i}{(2\pi)^6} \right) S f(E_1) f(E_2) (1 - f(E'_1)) (1 - f(E'_2)) \times \quad (3.57)$$

$$\times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k - p'_1 - p'_2) \frac{dE}{d\omega} \quad (3.58)$$

$$f(E) = \frac{1}{\exp(\frac{E-\mu}{T}) + 1}, \quad S = \frac{1}{8} \quad \text{statistischer Faktor} \quad (3.59)$$

Weiterhin wird der 3er-Impuls der Strahlung  $\mathbf{k}$  gegenüber dem Impuls der Nukleonen in den  $\delta$ -Distributionen vernachlässigt:

$$p_N \propto \sqrt{2M_N T}, \quad \text{aus der nichtrelativistischen Energie} \quad E = \frac{p_N^2}{2M_N} = T \quad (3.60)$$

$$E \approx p_\chi \propto T; \quad \text{die Neutralinos sind relativistisch} \quad (3.61)$$

$$\frac{p_\chi}{p_N} = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{2M_N}} \approx 0.12 \quad \text{mit} \quad T \approx 30 \text{ MeV}, \quad M_N \approx 1000 \text{ MeV} \quad . \quad (3.62)$$

Dies vereinfacht die Integrationen, die dann nur noch den Neutralinotensor betreffen. Dabei wird die sphärische Symmetrie und Energie-Impuls-Erhaltung ausgenutzt.

Im nächsten Schritt definieren wir Gesamt- und Relativimpulse sowie dimensionslose Variablen:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2, \quad \mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2), \quad \mathbf{p}' = \frac{1}{2}(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2), \quad (3.63)$$

$$u^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{2MT}, \quad u'^2 = \frac{\mathbf{p}'^2}{2MT}, \quad \lambda^2 = \frac{\mathbf{P}^2}{8MT}, \quad y = \frac{\mu - M}{T}, \quad \hat{M}_\chi = \frac{M_\chi}{T} \quad . \quad (3.64)$$

$T$  ist die Temperatur des Cores und damit die Temperatur des Neutronengases,  $M$  die Masse eines Neutrons. Die  $z$ -Achse wird entlang von  $\mathbf{P}$  gewählt. Außerdem können einige Winkelintegrationen schon ausgeführt werden. Bei hohen Temperaturen wird die Winkelabhängigkeit in den Fermi-Funktionen schwach, im Grenzfall völliger Entartung verschwindet diese Abhängigkeit. Da das Neutronengas nahezu entartet ist, können die Fermi-Funktionen durch ihre winkelmittelten Funktionen ersetzt werden:

$$\int_{-1}^1 d\cos\gamma \left[ e^{u^2+\lambda^2+2u\lambda\cos\gamma} + 1 \right]^{-1} \left[ e^{u^2+\lambda^2-2u\lambda\cos\gamma} + 1 \right]^{-1} = \quad (3.65)$$

$$\frac{e^{-(u^2+\lambda^2)}}{2\lambda u \sinh(u^2 + \lambda^2 - y)} \ln \left( \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}((u+\lambda)^2 - y)\right)}{\cosh\left(\frac{1}{2}((u-\lambda)^2 - y)\right)} \right) . \quad (3.66)$$

Genauso wird ein winkelmittelter hadronischer Tensor eingeführt:

$$\overline{\mathcal{H}}_{ii} = \int d\Omega d\Omega' \mathcal{H}_{ii} \quad , \quad (3.67)$$

diese Integrationen können analytisch ausgeführt werden, da die  $T$ -Matrix als Partialwellenzerlegung vorliegt. Übrig bleibt eine vierdimensionale Integration:

$$\epsilon = \beta \frac{2C_A^2 G_F^2}{(2\pi)^{11}} (2M_\chi)^{4.5} T^{4.5} M_\chi^4 \int_{\hat{M}_\chi}^\infty d\delta e^{-\delta} h(\delta/\hat{M}_\chi) \int_\delta^\infty d\sigma F(\delta, \sigma) \overline{\mathcal{H}}(T\sigma)_{ii}, \quad (3.68)$$

mit den Abkürzungen

$$\delta = \frac{p^2 - p'^2}{2MT}, \quad \sigma = \frac{p^2 + p'^2}{2MT}, \quad (3.69)$$

$$h(x) = \frac{(x-1)^3}{x} [(x^2-1)I_0(x) - (x-1)^2 I_2(x)], \quad (3.70)$$

$$I_k(x) = \int_{-1}^1 dt t^k \sqrt{1-t^2} \sqrt{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - t^2}, \quad (3.71)$$

$$F(\delta, \sigma) = \int_0^\infty d\lambda L\left(\sqrt{\frac{1}{2}(\sigma+\delta)}, \lambda\right) L\left(\sqrt{\frac{1}{2}(\sigma-\delta)}, \lambda\right), \quad (3.72)$$

$$L(a, \lambda) = \frac{1}{\sinh(a^2 + \lambda^2 - y)} \ln \left( \frac{\cosh(\frac{1}{2}((\lambda+a)^2 - y))}{\cosh(\frac{1}{2}((\lambda-a)^2 - y))} \right) . \quad (3.73)$$



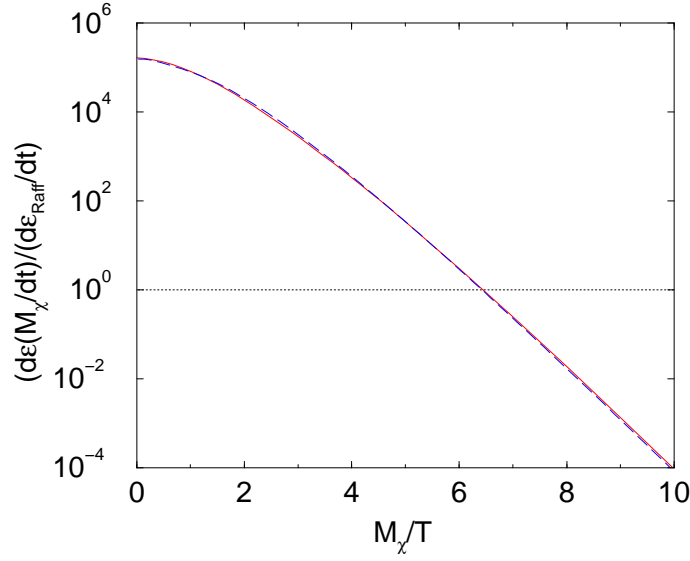


Abbildung 3.8: Emissivität der Bremsstrahlung

Die Funktionen  $I_k(x)$  lassen sich durch Taylorentwicklung der Wurzelterme bis zur dritten Ordnung in  $(t/x)^2$  recht genau analytisch berechnen. Die Entwicklung hat sogar bei  $x = 1$  nur einen Fehler von 5% auf das exakte Ergebnis. Alle anderen Integrationen werden numerisch mittels verallgemeinerter Gauß-Integration ausgeführt. Als Entartung  $\eta$  folgt für  $T = 30$  MeV und Kerndichte ein Wert von 1.3.

### Das Endergebnis

Das Endergebnis läßt sich mit hoher Genauigkeit durch

$$\epsilon = \alpha(1.5 + 6\hat{M}_\chi + 8.6\hat{M}_\chi^3)e^{-3\hat{M}_\chi} \times 10^{24} \frac{\text{erg}}{\text{g} \cdot \text{s}}, \quad T_{\text{Core}} = 30 \text{ MeV} \quad (3.74)$$

approximieren (s. Abb. 3.8).

Wegen der *soft-radiation*-Näherung ist dieses Ergebnis für alle Felder gültig, die an den axialen Strom koppeln. Man muß nur das entsprechende  $\beta$  bestimmen.

### Massenschranke für ein Bino

Mit diesem Resultat kann eine untere Massenschranke für ein Bino in Abhängigkeit der Squarkmasse berechnet werden, siehe Tab. 3.5.

Dieses Ergebnis widerspricht nicht der Existenz eines leichten Neutralinos mit einer Masse von 34 MeV, wie es z. B. in [CDRS00] vorgeschlagen wird, wenn die Squarkmasse in

Temperatur (MeV)	Squarkmasse (GeV)	Massenschranke (MeV)
30	100	147
30	200	110
30	500	49

Tabelle 3.5: Untere Massenschranke

der Größenordnung von einigen TeV liegt. Im Vergleich zu den unteren Massenschranken, die man aus dem Elektron-Positron-Kanal erhält, sind die letzteren etwas kleiner, liegen aber in derselben Größenordnung.

# Kapitel 4

## Diskussion

In diesem Kapitel möchte ich die Ergebnisse und die in sie einfließenden Annahmen aus dem vorhergehenden Abschnitt eingehender untersuchen. Die beiden Verfahren sollen miteinander verglichen werden, und die Neutralinoemissivität soll der Neutrinoemissivität gegenüber gestellt werden.

### 4.1 Diskussion des Elektron-Positron-Kanals

In die Berechnung der Emissivität des Elektron-Positron-Kanals sind eine Reihe von Eingangsdaten eingegangen, die im folgenden noch etwas ausführlicher diskutiert werden:

1. Temperatur- und Entartungsprofil einer Supernova
2. Coredichte
3. Dauer der Neutralinoemission und Menge der abgestrahlten Energie
4. Selekttronmasse
5. Mischungsparameter
6. Näherungen

#### Temperatur- und Entartungsprofil einer Supernova

Das Temperatur- und Entartungsprofil einer Supernova stammt aus [BL86]. Die Autoren haben eine Supernova simuliert, dazu mußten sie Anfangs- und Randwerte annehmen, um die Differentialgleichungen zu lösen. Über die Anfangswerte einer Supernova-Explosion

weiß man wenig. Kleine Änderungen der Anfangsdaten führen zur gleichen Entwicklung nach etwa einer halben Sekunde. Die Supernova befindet sich nach dieser Zeit im Diffusionsgleichgewicht. Als Temperatur- und Entartungsprofil habe ich die Profile nach einer halben Sekunde genommen. Man kann somit vermuten, daß dies vernünftige Profile sind. Für meine Rechnungen habe ich die Profile über die Zeit als konstant angenommen (es liegen auch nicht mehr Daten im relevanten Zeitintervall vor), betrachtet man deren Abbildungen, so stellt man fest, daß die Änderungen nach einer weiteren halben Sekunde nicht allzu groß sind, vor einer halben Sekunde allerdings ist die Änderung, aber auch die Unsicherheit groß. Diese Profile sind ungefähre Mittelwerte für die erste Sekunde.

### Coredichte

Da die Verteilungen in Abhängigkeit der eingeschlossenen Baryonenmasse angegeben sind, muß die Volumenintegration in eine Massenintegration transformiert werden. Dafür wird die Coredichte benötigt. Da das Core Kerndichte erreicht hat und diese Dichte bekannt ist, stellt dies kein Problem dar. Die Dichte wird konstant gehalten, was nur nicht ganz richtig ist. Weil aber die Emissivität aus einer dünnen Kugelschale stammt, macht das nichts aus.

### Dauer der Neutralinoemission und Menge der abgestrahlten Energie

Die abgestrahlte Gesamtenergie kann einfach aus einer kollabierenden, kugelsymmetrischen Massenverteilung abgeschätzt werden. Das meiste davon wird in Form von Neutrinos abgestrahlt. Ein Teil allerdings soll in Form von Neutralinos abgeführt werden. Da anzunehmen ist, daß die Neutralinos nicht wie die Neutrinos gefangen werden, können erstere die Supernova sofort verlassen. Wir wissen aber, daß der Hauptteil der Energie von Neutrinos abgeführt wird. Also dürfen die Neutralinos nur eine kleine, im Verhältnis zu den Neutrinos vernachlässigbare Störung darstellen. Die Neutrinos führen einige  $10^{53}$  erg ab, die Neutralinos sollen maximal etwa  $10^{52}$  erg abführen. Da die Unsicherheit bezüglich dieser Zahl groß ist, habe ich verschiedene Zeiten gewählt, um aus der Leistung  $P = \int dM_{\text{Stern}} \epsilon$  die Energie  $E = P \Delta t$  zu berechnen. Vergleicht man dies mit dem Kriterium von Raffelt ([Raf96]), der eine Höchstemissivität von  $10^{19}$  erg/(gs) für zulässig hält, ohne daß das Neutrinosignal gestört wird, so ist meine Schranke um einen Faktor Drei niedriger ( $10^{19}$  erg/(gs)  $\cdot 2,8 \cdot 10^{33}$  g  $\cdot 1$  s =  $2,8 \cdot 10^{52}$  erg). Bei diesem Vergleich muß man vorsichtig sein, weil dieses Kriterium auf diesen Prozeß nicht anwendbar ist. Die Neutralinos werden im Gegensatz zu den Neutrinos nicht verzögert emittiert. Dies ist aber eine Voraussetzung zur Anwendbarkeit des Raffelt-Kriteriums. Da ich von einer Emissionsdauer von etwa einer Sekunde ausgehe, habe ich die Profile nach einer halben Sekunde gewählt, so daß diese Profile ein zeitliches Mittel darstellen.

### Selektronmasse

Über die Selektionmasse wissen wir nur, daß sie mindestens im 100 GeV-Bereich liegen muß. Ich habe drei verschiedene Werte für die Selektionmasse gewählt und eine Massenschranke berechnet. Wird die Selektionmasse zu groß, wird die Berechnung einer unteren Massenschranke nicht mehr möglich. Ein Vorteil der Rechnung ist, daß die Selektionmasse und die Mischungsparameter (s. u.) in einem Faktor stecken, der nicht in die Integration eingeht.

Wenn die Selektionmasse im TeV-Bereich liegt, steht ein leichtes Neutralino (30 MeV, [CDRS00]) nicht im Widerspruch zu Supernova-Ereignissen.

### Mischungsparameter

Ebenso unbekannt sind die Mischungsparameter  $N_{1j}$  (Mischungsmatrix) der Neutralinos. Aus den Experimenten ergeben sich aber Schranken an diese Parameter (siehe vorheriges Kapitel). Aus der Supernova lassen sich keine Folgerungen darüber ziehen. Der Einfluß auf die Kopplung ist gering, solange die Sfermionmassen im Bereich der  $Z^0$ -Masse liegen. Bei Sfermionmassen im TeV-Bereich wird der Einfluß der  $N_{13/4}$  größer.

### Näherungen

Bei der Berechnung des Wirkungsquerschnitts sind eine Reihe von Näherungen gemacht worden: Die Elektronmasse wurde zu Null gesetzt, die Impulsüberträge in den Propagatoren vernachlässigt und die Massen von Selektion(L) und Selektion(R) als gleich angenommen. Die ersten beiden Näherungen sind durch die Kleinheit der Größen gerechtfertigt. Die letzte Näherung ist eine Vereinfachung, die mit der Supergravitation gerechtfertigt werden kann.

## 4.2 Die Nukleon-Nukleon-Bremsstrahlung

Einige Annahmen, die für den Elektron-Positron-Kanal gemacht werden müssen, fallen hier weg, da bei der Nukleon-Nukleon-Bremsstrahlung Emissivitäten mit dem Raffelt-Kriterium verglichen werden. Die Partialwellen der Nukleon-Nukleon-Streuung sind dem Experiment entnommen. Die Streuung wird realistischer behandelt. Für die Näherungen gilt dasselbe wie für den Elektron-Positron-Kanal.

Die Unbekannten stecken in dem Faktor  $\beta$ : die Mischungsparameter und die Squarkmasse (der  $Z^0$ -Kanal wurde in dieser Rechnung vernachlässigt).  $\beta$  verhält sich wie

$$\beta = \left( \frac{M_{Z^0}}{M_{\tilde{q}}} \right)^4 \times \mathcal{O}(1) \quad . \quad (4.1)$$

(Die  $Z^0$ -Massenabhängigkeit stammt aus der Normierung durch den Neutralen Strom). Auch hier ist die wesentliche Abhängigkeit durch die Squarkmasse gegeben. Ein leichtes (auch masseloses) Neutralino ist möglich, wenn die Squarkmasse im TeV-Bereich liegt.

### Soft-radiation-Näherung

Die abgestrahlten Neutralinos wurden als soft behandelt. Dies ist schon für leichte Neutralinos ( $\approx 30$  MeV) problematisch. Die Nukleon-Nukleon-Streuung spielt sich auf einer Längenskala ab, die einer Pionmasse ( $\approx 100$  MeV) entspricht. Der Entwicklungsparameter der Näherung  $\frac{M_\chi}{m_\pi}$  ist also mit  $\approx \frac{1}{3}$  schon für ein leichtes Neutralino nicht besonders klein. Damit ist diese Näherung nicht gerechtfertigt. Aber es gibt nichts Besseres. Außerdem wurden Effekte vernachlässigt, die durch das Medium Kernmaterie verursacht werden.

## 4.3 Vergleich mit der Neutrinoluminosität

In Abb. 2 aus [Bur90] ist die Neutrinoluminosität in den ersten Millisekunden nach dem Kollaps dargestellt. Der Peak bei 113 ms stammt von den durch die Schockwelle ausgetriebenen Elektron-Neutrinos. Die Luminosität erreicht  $6 \cdot 10^{53}$  erg/s, die im Peak abgestrahlte Energie beträgt aber nur  $2 \cdot 10^{51}$  erg, das Spektrum ist ein Einfangspektrum, kein (pseudo-)thermisches und damit auch kein Schwarzer Strahler. Zu derselben Zeit setzt abrupt die Emission von Myon-Neutrinos und Elektron-Antineutrinos ein, die kleinere Luminositäten erreichen. Nach dem Durchlaufen der Schockwelle ist das Spektrum ein pseudothermisches.

Da das Core für Neutralinos durchsichtig ist, kann man solche Peaks in der Luminosität für die Neutralinos nicht erwarten. Die Emissivität wird vielmehr durch das Zusammenspiel von Core-Temperatur und dem chemischen Potential von Elektronen und Positronen getrieben. Die Emissivität findet in meinem Modell einer Schale bei einer eingeschlossenen Masse von einer Sonnenmasse statt. An der Stelle ist die Temperatur hoch und das chemische Potential der Elektronen niedrig.

In [Kac00] wurde die Neutralinoemissivität bezogen auf das Corezentrum für drei verschiedene Entartungen berechnet (das hat den Vorteil, daß Mischungsparameter, Temperatur, Selektormasse nicht gebraucht werden). Für ein Neutralino mit einer Masse von 34 MeV ist die Emissivität kaum unterdrückt. Kachelrieß fordert in [Kac00] eine deutliche Unterdrückung ( $M_\chi/T > 10$ ), folglich muß entweder die Temperatur niedrig sein oder die Masse des Neutralino hoch.

**Anmerkung** Abb. 1 in [Kac00] konnte von mir nicht exakt reproduziert werden. Für größere  $x = M_\chi/T$ -Werte habe ich höhere relative Emissivitäten erhalten: Bei  $x = 2$

ergibt sich  $R = \epsilon(x)/\epsilon(0) \approx 0.7$  statt  $R \approx 0.6$  wie bei Kachelrieß.

# Anhang A

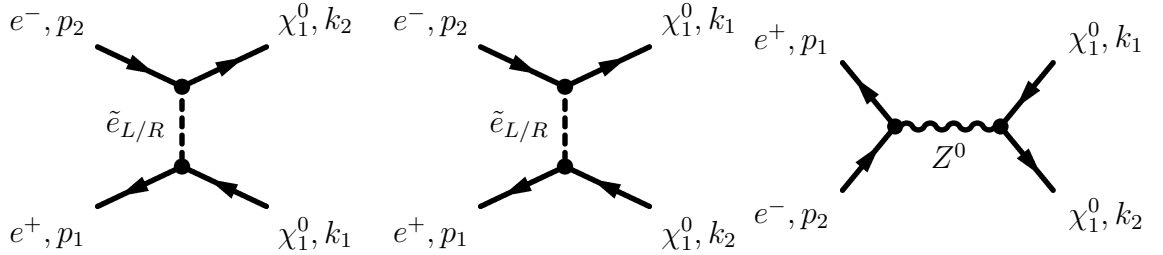
## Der totale Wirkungsquerschnitt

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \chi_1^0\chi_1^0)$$

In diesem Abschnitt soll die Berechnung des totalen Wirkungsquerschnitts des Prozesses  $e^+e^- \rightarrow \chi_1^0\chi_1^0$  dargestellt werden. Dabei stütze ich mich auf die allgemeinere Rechnung von A. Bartl et al. ([BFM86]).

### A.1 Beteiligte Diagramme

Folgende Prozesse tragen in niedrigster Ordnung zum Wirkungsquerschnitt bei:



### A.2 Feynmanregeln

Die Feynmanregeln für die Vertizes des Standardmodells sind [HM84] entnommen, bei den Regeln für die SUSY-Teilchen beziehe ich mich auf [HK85] und [GH86]. Die Elektronmassen



werden vernachlässigt sowie die Impulsüberträge gegenüber den Massen des  $Z^0$ -Bosons und des Selektions. Weiter sollen links-chirales und rechts-chirales Selektion (d. h. das dazugehörige Standardmodellelektron ist links- bzw. rechts-chiral) in ihren Massen entartet sein. Als Neutralinobasis wird die Photinobasis verwendet.

Die Propagatoren sehen wie folgt aus ( $\ell$ : Fermion mit schwachem Isospin  $-1/2$ ):

$$\tilde{\ell}\text{-Propagator} = \frac{i}{p^2 - M_\ell^2} \approx -\frac{i}{M_\ell^2} \quad (\text{A.1})$$

$$Z^0\text{-Propagator} = \frac{-i(g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / M_{Z^0}^2)}{p^2 - M_{Z^0}^2} \approx \frac{ig_{\mu\nu}}{M_{Z^0}^2} . \quad (\text{A.2})$$

Für den  $Z^0$ -Propagator wurde die Landau-Eichung benutzt. Die Vertizes stehen in Tabelle A.1. Die dabei auftretenden Konstanten bedeuten:

$$c_L = \frac{1}{2}(c_V + c_A); \quad c_R = \frac{1}{2}(c_V - c_A); \quad c_V = T_3 - 2e_\ell \sin^2 \theta_W; \quad c_A = T_3 \quad (\text{A.3})$$

$$L_1 = \frac{1}{2}(N_{14}N_{14}^* - N_{13}N_{13}^*) \cos(2\beta) - \frac{1}{2}(N_{13}N_{14}^* - N_{13}N_{14}^*) \sin(2\beta) = -R_1 . \quad (\text{A.4})$$

Zur Abkürzung vereinbaren wir:

$$l_1 = \sqrt{2} \left[ e_\ell \sin \theta_W N_{11} + \frac{1}{\cos \theta_W} \left( \frac{1}{2} - e_e \sin^2 \theta_W \right) N_{12} \right] , \quad (\text{A.5})$$

$$r_1 = \sqrt{2} \left[ e_\ell \sin \theta_W N_{11}^* - e_\ell \frac{\sin^2 \theta_W}{\cos \theta_W} N_{12}^* \right] . \quad (\text{A.6})$$

### A.3 Die Übergangsmatrixelemente

Die Anwendung der Feynmanregeln liefert fünf Übergangsmatrixelemente:

$$-i\mathcal{M}_1 = \frac{g^2}{\cos^2 \theta_W} D_{Z^0}(s) \bar{v}(p_1) \gamma^\mu (c_L P_L + c_R P_R) u(p_2) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu (L_1 P_L + R_1 P_R) v(p_4), \quad (\text{A.7})$$

$$-i\mathcal{M}_2 = -g^2 |l_1|^2 D_{\tilde{e}}(t) \bar{v}(p_1) P_R v(p_3) \bar{u}(p_4) P_L u(p_2), \quad (\text{A.8})$$

$$-i\mathcal{M}_3 = -g^2 |l_1|^2 D_{\tilde{e}}(u) \bar{v}(p_1) P_R v(p_4) \bar{u}(p_3) P_L u(p_2) \cdot (-1), \quad (\text{A.9})$$

$$-i\mathcal{M}_4 = -g^2 |r_1|^2 D_{\tilde{e}}(t) \bar{v}(p_1) P_L v(p_3) \bar{u}(p_4) P_R u(p_2), \quad (\text{A.10})$$

$$-i\mathcal{M}_5 = -g^2 |r_1|^2 D_{\tilde{e}}(u) \bar{v}(p_1) P_L v(p_4) \bar{u}(p_3) P_R u(p_2) \cdot (-1), \quad (\text{A.11})$$

$$\text{mit} \quad D_{Z^0}(s) = \frac{i}{M_{Z^0}^2}, \quad D_{\tilde{e}}(x) = -\frac{i}{M_{\tilde{e}}^2} . \quad (\text{A.12})$$

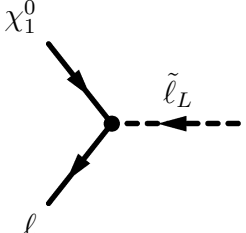
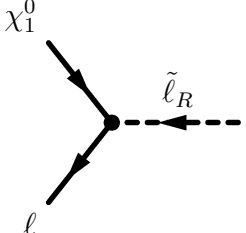
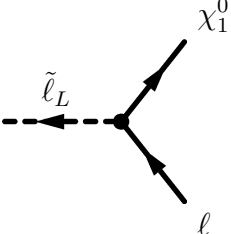
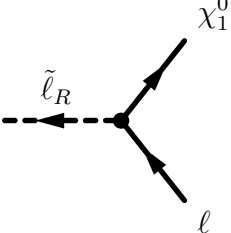
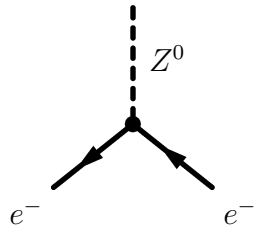
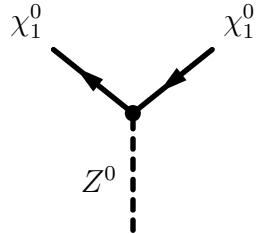
Graph des Vertex	Vertexfaktor
	$-i\sqrt{2}[ee_\ell N_{11} + \frac{g}{\cos\theta_W}(\frac{1}{2} - e_\ell \sin^2\theta_W)N_{12}]P_R$
	$i\sqrt{2}[ee_\ell N_{11}^* - e_\ell \frac{g\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}N_{12}^*]P_L$
	$-i\sqrt{2}[ee_\ell N_{11} + \frac{g}{\cos\theta_W}(\frac{1}{2} - e_\ell \sin^2\theta_W)N_{12}]P_L$
	$i\sqrt{2}[ee_\ell N_{11}^* - e_\ell \frac{g\sin^2\theta_W}{\cos^2\theta_W}N_{12}^*]P_R$
	$-\frac{ig}{\cos\theta_W}\gamma^\mu(c_L P_L + c_R P_R)$
	$\frac{ig}{\cos\theta_W}\gamma^\mu(L_1 P_L + R_1 P_R)$

Tabelle A.1: Vertexfaktoren

Da die Ausgangszustände identische Fermionen sind (Neutralinos sind Majorana-Fermionen), erhalten die Amplituden für  $M_3$  und  $M_5$  das zusätzliche, angeschriebene Minuszeichen.

## A.4 Der differentielle Wirkungsquerschnitt

### A.4.1 Berechnung der Betragsquadrate

Der nächste Schritt ist die Berechnung von

$$\sum_{\sigma(\text{out})} |\mathcal{M}|^2 = \sum_{\sigma(\text{out})} |\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_4 + \mathcal{M}_5|^2 \quad (\text{A.13})$$

$$= \sum_{\sigma(\text{out})} \left( \sum_{i=1}^5 |\mathcal{M}_i|^2 + 2 \Re \sum_{i < j} \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^+ \right) . \quad (\text{A.14})$$

Hierbei bedeutet  $(a \cdot b) = a_\mu b^\mu$ . Die Summation über die auslaufenden Spins wird ab sofort nicht mehr mitgeführt und implizit vorausgesetzt.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1\mathcal{M}_1^+ &= \frac{16g^4}{M_{Z^0}^4 \cos^4 \theta_W} \left( c_L^2 L_1^2 (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + c_R^2 L_1^2 (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4), \right. \\ &\quad + c_L^2 L_1 R_1 M^2 (p_1 \cdot p_2) + c_R^2 L_1 R_1 M^2 (p_1 \cdot p_2) \\ &\quad \left. + c_R^2 R_1^2 (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + c_L^2 R_1^2 (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^+ = -\frac{g^4 |l_1|^2}{M_{Z^0}^2 M_{\tilde{e}^2} \cos^2 \theta_W} \left( 4c_L L_1 M^2 (p_1 \cdot p_2) + 8c_L R_1 (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) \right), \quad (\text{A.16})$$

$$\mathcal{M}_1\mathcal{M}_3^+ = -\frac{g^4 |l_1|^2}{M_{Z^0}^2 M_{\tilde{e}^2} \cos^2 \theta_W} \left( 4c_L L_1 M^2 (p_1 \cdot p_2) + 8c_L R_1 (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) \right), \quad (\text{A.17})$$

$$\mathcal{M}_1\mathcal{M}_4^+ = -\frac{g^4 |r_1|^2}{M_{Z^0}^2 M_{\tilde{e}^2} \cos^2 \theta_W} \left( 4c_R R_1 M^2 (p_1 \cdot p_2) + 8c_R L_1 (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) \right), \quad (\text{A.18})$$

$$\mathcal{M}_1\mathcal{M}_5^+ = -\frac{g^4 |r_1|^2}{M_{Z^0}^2 M_{\tilde{e}^2} \cos^2 \theta_W} \left( 4c_R R_1 M^2 (p_1 \cdot p_2) + 8c_R L_1 (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) \right), \quad (\text{A.19})$$

$$\mathcal{M}_2\mathcal{M}_2^+ = \frac{g^4 |l_1|^4}{M_{\tilde{e}}^4} 4(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4), \quad (\text{A.20})$$

$$\mathcal{M}_2\mathcal{M}_3^+ = -\frac{g^4 |l_1|^4}{M_{\tilde{e}}^4} 2M^2 (p_1 \cdot p_2), \quad (\text{A.21})$$

$$\mathcal{M}_2\mathcal{M}_4^+ = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$\mathcal{M}_2\mathcal{M}_5^+ = 0, \quad (\text{A.23})$$

$$\mathcal{M}_3\mathcal{M}_3^+ = \frac{g^4 |l_1|^4}{M_{\tilde{e}}^4} 4(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3), \quad (\text{A.24})$$

$$\mathcal{M}_3\mathcal{M}_4^+ = 0, \quad (\text{A.25})$$

$$\mathcal{M}_3\mathcal{M}_5^+ = 0, \quad (\text{A.26})$$

$$\mathcal{M}_4\mathcal{M}_4^+ = \frac{g^4 |r_1|^4}{M_{\tilde{e}}^4} 4(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4), \quad (\text{A.27})$$

$$\mathcal{M}_4\mathcal{M}_5^+ = -\frac{g^4 |r_1|^4}{M_{\tilde{e}}^4} 2M^2 (p_1 \cdot p_2), \quad (\text{A.28})$$

$$\mathcal{M}_5\mathcal{M}_5^+ = \frac{g^4 |r_1|^4}{M_{\tilde{e}}^4} 4(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) \quad . \quad (\text{A.29})$$

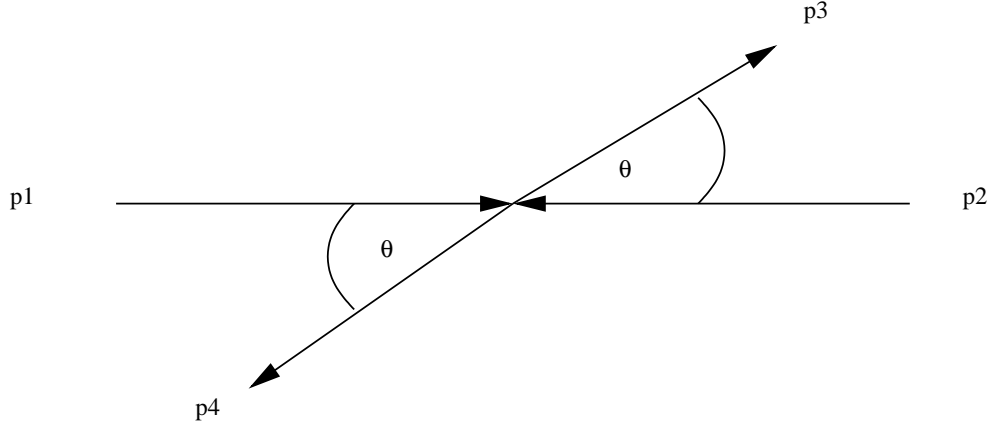


Abbildung A.1: Impulse im Schwerpunktsystem

### A.4.2 Weitere Vollständigkeitsrelationen

Für die Berechnung des Betragsquadrates des Gesamtmatrixelements sind die folgenden Vollständigkeitsrelationen nützlich.

$$\sum_s u(\mathbf{p}, s) \bar{u}(\mathbf{p}, s) = \not{p} + m, \quad \sum_s v(\mathbf{p}, s) \bar{v}(\mathbf{p}, s) = \not{p} - m, \quad (\text{A.30})$$

$$\sum_s u(\mathbf{p}, s) v^T(\mathbf{p}, s) = (\not{p} + m) C^T, \quad \sum_s \bar{u}^T(\mathbf{p}, s) \bar{v}(\mathbf{p}, s) = C^{-1} (\not{p} - m), \quad (\text{A.31})$$

$$\sum_s \bar{v}^T(\mathbf{p}, s) \bar{u}(\mathbf{p}, s) = C^{-1} (\not{p} + m), \quad \sum_s v(\mathbf{p}, s) u^T(\mathbf{p}, s) = (\not{p} - m) C^T. \quad (\text{A.32})$$

Diese Regeln werden sofort einsichtig, wenn man

$$u(\mathbf{p}, s) = C \bar{v}^T(\mathbf{p}, s); \quad v(\mathbf{p}, s) = C \bar{u}^T(\mathbf{p}, s) \quad (\text{A.33})$$

in die bekannten Vollständigkeitsrelationen einsetzt. Eine weitere hilfreiche Identität ist

$$\gamma^{\mu T} = -C^{-1} \gamma^\mu C. \quad (\text{A.34})$$

### A.4.3 Die Kinematik

Der totale Wirkungsquerschnitt ist ein Lorentzskalar. Also kann man ein beliebiges Bezugssystem wählen, um den totalen Wirkungsquerschnitt zu berechnen. Ich wähle als Bezugssystem das Schwerpunktsystem, weil dann die Rechnung einfacher ist.

Als Parametrisierung der Impulse (genauer: 4er-Impulse) wähle ich (siehe Abbildung A.1)

$$p_1 = (E, 0, 0, E), \quad p_3 = (\omega, 0, k \sin \theta, k \cos \theta), \quad (\text{A.35})$$

$$p_2 = (E, 0, 0, -E), \quad p_4 = (\omega, 0, -k \sin \theta, -k \cos \theta). \quad (\text{A.36})$$

Hierbei sind  $k = |\mathbf{p}_3| = |\mathbf{p}_4|$  der Betrag des 3er-Impulses,  $\omega$  die Energie der auslaufenden Teilchen,  $E$  die Energie und der Impuls des einlaufenden Elektrons und Positrons (Sie werden als masselos betrachtet.). Damit folgt für die Mandelstam-Variablen:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 4E^2, \quad (\text{A.37})$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = -\frac{1}{2} \left( s - \sqrt{s(s - 4M^2)} \cos \theta \right) + M^2, \quad (\text{A.38})$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = -\frac{1}{2} \left( s + \sqrt{s(s - 4M^2)} \cos \theta \right) + M^2. \quad (\text{A.39})$$

Die Minkowski-Produkte in den Gleichungen (A.16)-(A.29) werden mit diesen Beziehungen durch die Mandelstam-Variablen ausgedrückt:

$$(p_1 \cdot p_2) = \frac{1}{2}s, \quad (\text{A.40})$$

$$(p_1 \cdot p_3) = (p_2 \cdot p_4) = -\frac{1}{2}(t - M^2), \quad (\text{A.41})$$

$$(p_1 \cdot p_4) = (p_2 \cdot p_3) = -\frac{1}{2}(u - M^2), \quad (\text{A.42})$$

$$(p_3 \cdot p_4) = \frac{1}{2}s - M^2. \quad (\text{A.43})$$

#### A.4.4 Der differentielle Wirkungsquerschnitt

Der differentielle Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem für eine  $2 \rightarrow 2$ -Streuung ist allgemein gegeben durch (siehe z. B. [HM84]):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{p_f}{p_i} |\mathcal{M}|^2. \quad (\text{A.44})$$

Außerdem muß noch über die Eingangsspins gemittelt werden. Da die auslaufenden Neutralinos identisch sind, ist der Phasenraum nur halb so groß. Einsetzen liefert:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{g^4}{128\pi^2 s} \sqrt{1 - \frac{4M^2}{s}} \left( (t - M^2)^2 + (u - M^2)^2 - 2M^2 s \right) \times \quad (\text{A.45})$$

$$\left[ \frac{c_L^2 L_1^2 + c_R^2 L_1^2}{M_{Z^0}^4 \cos^4 \theta_W} + \frac{L_1 (c_L |l_1|^2 - c_R |r_1|^2)}{M_{Z^0}^2 M_e^2 \cos^2 \theta_W} + \frac{|l_1|^4 + |r_1|^4}{4M_e^2} \right]. \quad (\text{A.46})$$

### A.4.5 Der totale Wirkungsquerschnitt

Der totale Wirkungsquerschnitt ist gegeben durch  $\sigma = \int_O \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$ . Weil wir es in unserem Falle mit  $2 \rightarrow 2$ -Streuung zu tun haben, hängt der differentielle Wirkungsquerschnitt nur vom Winkel zwischen einlaufendem und auslaufendem Teilchen ab. Für die Integration ist nur der Term  $(t - M^2)^2 + (u - M^2)^2 - 2M^2s$  relevant, die restlichen Terme sind für die Integration unwichtige Vorfaktoren. Setzt man die Gleichungen (A.38) und (A.39) für die Mandelstam-Variablen ein, so vereinfacht sich der differentielle Wirkungsquerschnitt zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{g^4 s (1 + \cos^2 \theta)}{128 \pi^2} \left[ \frac{c_L^2 L_1^2 + c_R^2 L_1^2}{M_{Z^0}^4 \cos^4 \theta_W} + \frac{L_1 (c_L |l_1|^2 - c_R |r_1|^2)}{M_{Z^0}^2 M_{\tilde{e}}^2 \cos^2 \theta_W} + \frac{|l_1|^4 + |r_1|^4}{4 M_{\tilde{e}}^4} \right] \times \left( 1 - \frac{4m^2}{s} \right)^{3/2} \quad (\text{A.47})$$

Der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  hat dann folgende Gestalt, wenn man  $\int_O (1 + \cos^2 \theta) d\phi d\cos \theta = \frac{16}{3} \pi$  benutzt:

$$\sigma = \frac{\pi \alpha^2}{3 \sin^4 \theta_W} \left[ \frac{c_L^2 L_1^2 + c_R^2 L_1^2}{M_{Z^0}^4 \cos^4 \theta_W} + \frac{L_1 (c_L |l_1|^2 - c_R |r_1|^2)}{M_{Z^0}^2 M_{\tilde{e}}^2 \cos^2 \theta_W} + \frac{|l_1|^4 + |r_1|^4}{4 M_{\tilde{e}}^4} \right] \times \left( 1 - \frac{4m^2}{s} \right)^{3/2} s. \quad (\text{A.48})$$

# Anhang B

## Fierz-Transformation

### B.1 Fierz-Transformation

#### B.1.1 Allgemeine Transformationsformel

Ziel dieser Transformation ist es, Strom-Strom-Wechselwirkungen der Form

$$\mathcal{M}_{AB} \propto (\bar{v}_1 \Gamma_A v_2) (\bar{u}_3 \Gamma_B u_4), \quad \Gamma_k \in \{1, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu} = i/8(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)\} \quad (\text{B.1})$$

wie sie zum Beispiel in der Reaktion  $e^+ e^- \rightarrow \bar{\nu} \nu$  auftreten, in der Form

$$\mathcal{M}_{AB} \propto \sum_{C,D} c_{ABCD} (\bar{v}_1 \Gamma_C u_4) (\bar{u}_3 \Gamma_D v_2), \quad (\text{B.2})$$

zu schreiben (Die Summe läuft über alle Lorentz-Kovarianten). Dann zerfallen auch die Interferenzterme mehrerer Matrixelemente in Produkte zweier Tensoren mit gleicher Stromstruktur, was sonst nicht immer der Fall ist. Dadurch können Rechnungen einfacher werden. Man entwickelt  $(\bar{v}_1 \Gamma_A v_2) (\bar{u}_3 \Gamma_B u_4)$  nach einem vollständigen Satz von Matrizen, nämlich den 16  $\Gamma$ -Matrizen. Außerdem benutzt man, daß diese orthogonal zueinander bzgl. der Spur als Skalarprodukt und (anti-)hermitesch sind.

Die Entwicklungskoeffizienten ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned} (\Gamma_A)_{\alpha\beta} (\Gamma_B)_{\gamma\delta} &= \sum c_{ABCD} (\Gamma_C)_{\alpha\delta} (\Gamma_D)_{\gamma\beta} \\ \Rightarrow (\Gamma_A)_{\alpha\beta} (\Gamma_D)_{\beta\gamma} (\Gamma_B)_{\gamma\delta} (\Gamma_C)_{\delta\alpha} &= c_{ABCD} (\Gamma_C)_{\alpha\delta} (\Gamma_C)_{\delta\alpha} (\Gamma_D)_{\beta\gamma} (\Gamma_D)_{\gamma\beta} \\ \Leftrightarrow \text{Tr}(\Gamma_A \Gamma_D \Gamma_B \Gamma_C) &= c_{ABCD} \text{Tr}(\Gamma_C^2) \text{Tr}(\Gamma_D^2) \\ \Rightarrow c_{ABCD} &= \frac{\text{Tr}(\Gamma_A \Gamma_D \Gamma_B \Gamma_C)}{\text{Tr}(\Gamma_C^2) \text{Tr}(\Gamma_D^2)} . \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$



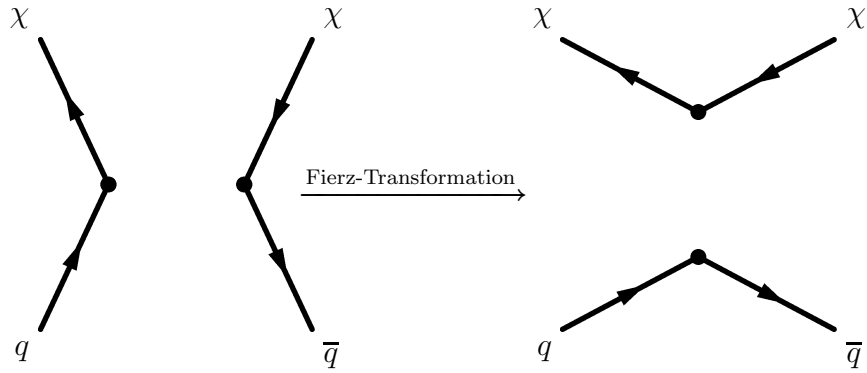


Tabelle B.1: Wirkung der Fierz-Transformation

Die Gramsche Matrix  $G_{AB} = (\text{Tr}(\Gamma_A \Gamma_B))$  lautet (Reihenfolge: Skalar, Pseudoskalar, Vektor, Axialvektor, Tensor):

$$G = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\mu\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}) \end{pmatrix} . \quad (\text{B.4})$$

### B.1.2 Anwendung auf $q\bar{q} \rightarrow \chi^0\chi^0$

Die Fierz-Transformation wird auf das Matrixelement  $\mathcal{M} = \bar{u}(p_1)P_R v(p_4)\bar{u}(p_3)P_L u(p_2)$  angewandt, was der Struktur  $\frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \otimes \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$  entspricht. Es ist

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \otimes \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = \frac{1}{4}(1 \otimes 1 - 1 \otimes \gamma_5 + \gamma_5 \otimes 1 - \gamma_5 \otimes \gamma_5) . \quad (\text{B.5})$$

Anwendung von Formel B.3 auf die einzelnen Terme ergibt:

$$1 \otimes 1 = \frac{1}{4} \left( 1 \otimes 1 + \gamma_5 \otimes \gamma_5 + \gamma_\mu \otimes \gamma^\mu - \gamma_5 \gamma_\mu \otimes \gamma_5 \gamma^\mu + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \otimes \sigma^{\mu\nu} \right), \quad (\text{B.6})$$

$$1 \otimes \gamma_5 = \frac{1}{4} \left( 1 \otimes \gamma_5 + \gamma_\mu \otimes \gamma_5 \gamma^\mu + \gamma_5 \otimes 1 - \gamma_5 \gamma_\mu \otimes \gamma^\mu \right), \quad (\text{B.7})$$

$$\gamma_5 \otimes 1 = \frac{1}{4} \left( 1 \otimes \gamma_5 - \gamma_\mu \otimes \gamma_5 \gamma^\mu + \gamma_5 \otimes 1 + \gamma_5 \gamma_\mu \otimes \gamma^\mu \right), \quad (\text{B.8})$$

$$\gamma_5 \otimes \gamma_5 = \frac{1}{4} \left( 1 \otimes 1 + \gamma_5 \otimes \gamma_5 - \gamma_\mu \otimes \gamma^\mu + \gamma_5 \gamma_\mu \otimes \gamma_5 \gamma^\mu + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \otimes \sigma^{\mu\nu} \right) . \quad (\text{B.9})$$

Man erhält nach Einsetzen dieses Zwischenresultats in Gl. (B.5):

$$P_R \otimes P_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \otimes \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = \frac{1}{8} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \otimes \gamma^\mu (1 - \gamma_5) = \frac{1}{2} \gamma_\mu P_R \otimes \gamma^\mu P_L \quad (\text{B.10})$$

Dieses Resultat ist aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Ausgangsstruktur nicht weiter verwunderlich!

## B.2 Nichtrelativistischer Grenzfall der Kopplungsstrukturen

Ein Diracspinor  $u^{(s)}(\mathbf{p})$ ,  $E > 0$ , oder  $v^{(r)}(\mathbf{p})$ ,  $E < 0$ , hat als Lösung der Dirac-Gleichung in der Standard-Darstellung die allgemeine Form

$$u^{(s)}(\mathbf{p}) = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad v^{(s)}(\mathbf{p}) = \sqrt{|E| + m} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|E| + m} \chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (\text{B.12})$$

Wenn die kinetische Energie gegenüber der Masse vernachlässigbar klein ist, sind die kleinen Komponenten der Diracspinoren unterdrückt:

$$u^{(s)}(\mathbf{p}) = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi^{(s)} \end{pmatrix} \approx \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{B.13})$$

Dadurch überleben von den fünf Lorentzkovarianten nur solche, die große mit großen Komponenten verbinden. Am Ende bleiben nur zwei Kopplungsstrukturen übrig. Dazu verwendet man die  $\gamma$ -Matrizen in der Dirac-Darstellung:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

$\gamma^0, \gamma^k \gamma^5, \sigma^{ij}$  sind diagonal, alle übrigen Kombinationen mischen kleine mit großen Komponenten und verschwinden deshalb (vgl. dazu [CG95]).

$$\bar{u}u \rightarrow \chi^+ \chi, \quad (\text{B.15})$$

$$\bar{u}\gamma^\mu u \rightarrow \chi^+ \chi, \quad \mu = 0; \quad 0 \text{ sonst}, \quad (\text{B.16})$$

$$\bar{u}\gamma^5 u \rightarrow 0, \quad (\text{B.17})$$

$$\bar{u}\gamma^\mu \gamma^5 u \rightarrow \chi^+ \sigma^i \chi, \quad \mu = i; \quad 0 \text{ sonst}, \quad (\text{B.18})$$

$$\bar{u}\sigma^{\mu\nu} u \rightarrow \chi^+ \sigma^i \chi, \quad \mu = j, \quad \nu = k, ijk, \text{ zyklisch}; \quad 0 \text{ sonst}. \quad (\text{B.19})$$

(Griechische Buchstaben bezeichnen Indizes, die von 0 bis 3 laufen, römische Buchstaben Indizes von 1 bis 3,  $u$  ist ein Diracspinor,  $\chi$  ein Weylspinor.) Man sieht, daß nur  $I$  und  $\sigma$  übrigbleiben.

# Anhang C

## Partialwellenzerlegung

Hier wird die Partialwellenzerlegung des winkelmittelten hadronischen Tensors  $\overline{\mathcal{H}}^{ii}$  angegeben.

$$\langle SM'_S \mathbf{p}' | T_{NN} | SM_S \mathbf{p} \rangle = \sum Y_{L'M'_L}(\mathbf{p}) Y_{LM_L}(\mathbf{p})^* \mathcal{T}(p, S' M'_S, SM_S, L', \Delta L, M_J) \quad (\text{C.1})$$

$$\mathcal{T}(p, S' M'_S, SM_S, L', \Delta L, M_J) = \sum \langle S' M'_S, L' M'_L | JM_J \rangle \langle S' M'_S, L' M'_L | JM_J \rangle T^{JL'LS}(p) \quad (\text{C.2})$$

$$T^{JL'LS}(p) = (2\pi)^6 \left( \frac{2}{\pi M p} \right) e^{i\delta_{JL'LS}(p)} \sin(\delta_{JL'LS}(p)) \quad (\text{C.3})$$

(falls die Kanäle ungekoppelt sind)

$S, M_S$  : Spin und dazugehörige 3-Komponente

$L, M_L$  : Drehimpuls und dazugehörige 3-Komponente

$J, M_J$  : Gesamtdrehimpuls und dazugehörige 3-Komponente

$\delta_{JL'LS}$  : Phasenverschiebung der Partialwelle  $JL'LS$  .

Eine einfache, aber längliche Rechnung führt zur Beziehung zwischen  $\overline{\mathcal{H}}^{ii}$  und  $\mathcal{T}$ :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}^{ii} = \sum 2 \Big[ & (2 - M_S M'_S) \left| \mathcal{T}(p, 1M'_S, 1M_S, L', \Delta L, M_J) \right|^2 \\ & - 2\Re \left( \mathcal{T}(p, 1(M'_S - 1), 1M_S, L', \Delta L, M_J - 1)^* \mathcal{T}(p, 1M'_S, 1(M_S + 1), L', \Delta L, M_J) \right) \Big] \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

## Anhang D

### Liste der verwendeten Symbole

Symbol	Bezeichnung	SI-Einheit	natürliche Einheit
$s$	Länge	m	eV <sup>-1</sup>
$t$	Zeit	s	eV <sup>-1</sup>
$a$	Beschleunigung	ms <sup>-2</sup>	eV
$E$	Energie	J	eV
$F$	Kraft	N	eV
$L$	Leuchtkraft	kg/s	eV <sup>2</sup>
$M$	Masse	kg	eV
$P$	Druck	Nm <sup>-2</sup>	eV <sup>4</sup>
$p, k$	Impuls	Ns	eV
$R, r$	Radius	m	eV <sup>-1</sup>
$T$	Temperatur	K	eV
$u, e$	Energiedichte	Jm <sup>-3</sup>	eV <sup>4</sup>
$V$	Volumen	m <sup>3</sup>	eV <sup>-3</sup>
$v$	Geschwindigkeit	ms <sup>-1</sup>	1
$\epsilon$	Emissivität	Jm <sup>-3</sup> s <sup>-1</sup>	eV <sup>5</sup>
$\rho$	Dichte	kgm <sup>-3</sup>	eV <sup>4</sup>
$\sigma$	Wirkungsquerschnitt	b	eV <sup>-2</sup>
$P$	Leistung	W	eV <sup>-2</sup>
$\mu$	chemisches Potential	J	eV
$\eta$	Entartung	1	1
$w$	“chemische Zusammensetzung”	1	1
$N$	Teilchenzahl	1	1
$n$	Teilchendichte	m <sup>-3</sup>	eV <sup>3</sup>

Tabelle D.1: Liste physikalischer Größen

Symbol	Konstante	Wert
$e$	Elementarladung	$1.60 \cdot 10^{-19} \text{ As}$
$\alpha$	Feinstrukturkonstante	$1/137$
$G$	Gravitationskonstante	$6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{kg}^{-2}$
$k$	Boltzmann-Konstante	$1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} = 0.862 \cdot 10^{-4} \text{ eV/K}$
$\hbar$	Planck-Konstante	$6.625 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
$c$	Lichtgeschwindigkeit	$3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
$M_\odot$	Sonnenmasse	$1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
$m_n$	Masse Neutron	$1.675 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 939.6 \text{ MeV}$
$m_p$	Masse Proton	$1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 938.3 \text{ MeV}$
$\theta_W$	schwacher Mischungswinkel	$\sin^2 \theta_W = 0.223$

Tabelle D.2: Liste der Konstanten

Symbol	Operator	mögliche Darstellung
$C$	Ladungskonjugation	$i\gamma_2\gamma_0$
$P_{L,R}$	Projektoren	$\frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)$
$a^*$	komplexe Konjugation von $a$	
$A^T$	Transposition von $A$	
$A^+$	hermitesche Konjugation von $A$	

Tabelle D.3: Liste der Operatoren

Symbol	Bezeichnung
$\mathcal{L}$	Lagrangedichte
$\mathcal{M}$	Matrizelement
$\mathcal{N}_{ij}$	Neutralinotensor
$\mathcal{H}_{ij}$	Hadrontensor
$N$	unitäre Transformation

Tabelle D.4: sonstige Symbole

cgs $\rightarrow$ natürliche Einheit	natürliche $\rightarrow$ cgs Einheit
1 cm = $5,068 \cdot 10^4$ 1/eV	1 eV = $5.068 \cdot 10^4$ 1/cm
1 s = $1.52 \cdot 10^{15}$ 1/eV	1 eV = $1.519 \cdot 10^{15}$ 1/s
1 K = $8.62 \cdot 10^{-5}$ eV	1 eV = $1.160 \cdot 10^4$ K
1 erg = $6.24 \cdot 10^{11}$ eV	1 eV = $1.602 \cdot 10^{-12}$ erg
1 g = $5.61 \cdot 10^{32}$ eV	1 eV = $1.783 \cdot 10^{-33}$ g

Tabelle D.5: Umrechnung cgs-Einheiten–natürliche Einheiten



# Literaturverzeichnis

- [AD66] S. L. Adler and Y. Dothan. Low-energy theorem for the weak axial-vector vertex. *Physical Review*, 151(4):1267–1277, Nov 1966.
- [Arn96] D. Arnett. *Supernovae and Nucleosynthesis*. Princeton University Press, 1996.
- [AS70] M. Abramowitz and I. A. Stegun, editors. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 1970.
- [Bah89] J. B. Bahcall. *Neutrino Astrophysics*. Cambridge University Press, 1989.
- [BB85] H. A. Bethe and G. Brown. How a supernova explodes. *Scientific American*, 252(5):40–48, Mai 1985.
- [BBAL79] H. A. Bethe, G. E. Brown, J. Applegate, and J. M. Lattimer. Equation of state in the gravitational collapse of stars. *Nuclear Physics A*, 324:487–533, 1979.
- [Bet90] H. A. Bethe. Supernova mechanisms. *Reviews of Modern Physics*, 62(4):801–866, Okt. 1990.
- [BFM86] A. Bartl, H. Fraas, and W. Majerotto. Production and decay of neutralinos in  $e^+e^-$  annihilation. *Nuclear Physics B*, 278:1–25, 1986.
- [BFMO89] A. Bartl, H. Fraas, W. Majerotto, and N. Oshimo. Neutralino mass matrix in the minimal supersymmetric model. *Physical Review D*, 40(5):1594–1605, 1989.
- [BL86] A. Burrows and J. M. Lattimer. The birth of neutron stars. *The Astrophysical Journal*, 307:178–196, Aug 1986.
- [BL94] D. Bailin and A. Love. *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*. Institute of Physics Publishing, 1994.

- [BM89] R. Barbieri and R. N. Mohapatra. Limits on right-handed interactions from sn 1987 a observations. *Physical Review D*, 39(4):1229 – 1232, Feb 1989.
- [BNP84] S. M. Bilenky, N. P. Nedelcheva, and S. T. Petcov. Some implications of  $CP$  invariance for mixing of mayorana neutrinos. *Nuclear Physics B*, 147:61, 1984.
- [Bur90] A. Burrows. Neutrinos from supernova explosions. *Annu. Rev. Nucl. Par. Sci.*, 40:181–212, 1990.
- [CDRS00] D. Choudhury, H. Dreiner, P. Richardson, and S. Sarkar. A supersymmetric solution to the KARMEN time anomaly. *Physical Review D*, 61, 2000.
- [CG95] R. N. Cahn and G. Goldhaber. *The Experimental Foundations of Particle Physics*. Cambridge University Press, 1995.
- [DMT98] D. A. Dicus, R. N. Mohapatra, and V. L. Teplitz. Supernova constraints on a superlight gravitino. *Physical Review D*, 57:578–582, 1998.
- [DvDKT00] A. E. L. Dieperink, E. N. E. van Dalen, A. Korchin, and R. Timmermans. Cooling of stars revisited: Applications of low energy theorems. *nucl-th.0012073*, 2000.
- [EOSS88] J. Ellis, K. A. Olive, S. Sarkar, and D. W. Sciama. Low-mass photinos and supernova. *Physics Letters B*, 215(2):404–410, Dez 1988.
- [FM79] B. L. Friman and O. V. Maxwell. Neutrino Emissivities of Neutron Stars. *The Astrophysical Journal*, 1979.
- [GH86] J. F. Gunion and H. E. Haber. Higgs bosons in supersymmetric models (i). *Nuclear Physics B*, 272:1–76, 1986.
- [GS82] H. S. Goldberg and M. D. Scadron. *Physics of Stellar Evolution and Cosmology*. Gordon and Breach Science Publisher, 1982.
- [Hab93] H. Haber. Introductory to low-energy supersymmetry. *hep-ph/9306207*, 1993.
- [Han01] C. Hanhart. Constraints on high energy phenomena from low energy nuclear physics. *astro-ph:0103470*, 2001.
- [HK85] H. E. Haber and G. L. Kane. The search for supersymmetry: Probing physics beyond the standard model. *Physics Reports*, 117:75–263, 1985.

- [HM84] F. Halzen and A. D. Martin. *Quarks & Leptons*. John Wiley & Sons, 1984.
- [HPR01] C. Hanhart, D. R. Phillips, and S. Reddy. Neutrino and axion emissivities of neutron stars from nucleon-nucleon scattering data. *Physical Letters B*, 499:9–15, 2001.
- [HPRS01] C. Hanhart, D. R. Phillips, S. Reddy, and M. J. Savage. Extra dimensions, sn 1987a and nucleon-nucleon scattering data. *Nuclear Physics B*, 595:335–359, 2001.
- [Kac00] M. Kachelrieß. The karmen anomaly, light neutralinos and type ii supernovae. *JHEP 0002*, 2000.
- [KAS92] M. M. El Kheisha, A. A. Aboshousha, and A. A. Shafik. Analytic formulas for the neutralino masses and the neutralino mixing matrix. *Physical Review D*, 45:4345, 1992.
- [KW90] R. Kippenhahn and A. Weigert. *Stellar Structure and Evolution*. Springer-Verlag, 1990.
- [LL71] L. D. Landau and E. M. Lifschitz. *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, volume 2. Akademie-Verlag, 1971.
- [Low58] F. E. Low. Bremsstrahlung of very low-energy quanta in elementary particle collisions. *Physical Review*, 110(4):974 – 977, Mai 1958.
- [Mar97] S. Martin. A supersymmetry primer. *hep-ph/9709356*, 1997.
- [MP90] R. N. Mohapatra and P. B. Pal. *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics*. World Scientific, 1990.
- [Nac86] O. Nachtmann. *Elementarteilchenphysik*. Vieweg, 1986.
- [Pet90] A. G. Petschek, editor. *Supernovae*. Springer-Verlag, 1990.
- [Raf96] G. G. Raffelt. *Stars as Laboratory for Fundamental Physics*. The University of Chicago Press, 1996.
- [Rei75] F. Reif. *Physikalische Statistik und Physik der Wärme*. de Gruyter, 1975.
- [Ros90] J. Rosiek. Complete set of feynman rules for the minimal extension of the standard modell. *Physical Review D*, 41:3464–3500, Juni 1990.

- [SS66] A. H. Stroud and D. Secrest. *Gaussian Quadrature Formulas*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1966.
- [Sto94] J. Stoer. *Numerische Mathematik 1*. Springer-Verlag, 1994.
- [Wei72] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley & Sons, 1972.